Коло в олімпіадних задачах

Розв’язування учнями нестандартних математичних задач сприяє розвитку їх здібностей до самостійного математичного мислення. Задачі, запропоновані учасникам олімпіад, відрізняються від звичайних шкільних задач рівнем складності й нестандартністю. І не завжди легко здогадатися яким методом розв’язується дана задача. У цій статті підібрані задачі різних етапів математичних олімпіад, при розв’язуванні яких використовується матеріал теми “Коло. Вписані й описані многокутники”:

I • Множина точок на площині, рівновіддалених від деякої точки О цієї площини, називається колом
(рис. 1).
• Точка О називається центром кола. Відрізки, які сполучають точки кола з центром, називаються радіусами кола. ОС – радіус. Очевидно, всі радіуси рівні між собою.
• Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається хордою. KL - хорда
• Хорда, що проходить через центр кола, називається діаметром. АВ – діаметр. Діаметр кола дорівнює подвоєному радіусу.

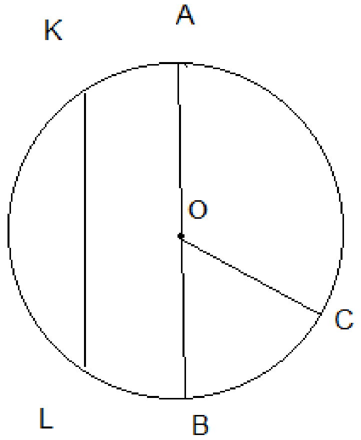


Рис.1

II • Кут з вершиною в центрі кола називається центральним.
• Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.
• Вписаний кут дорівнює половині градусної міри дуги, на яку спирається, а центральний кут дорівнює градусній мірі дуги, на яку спирається.

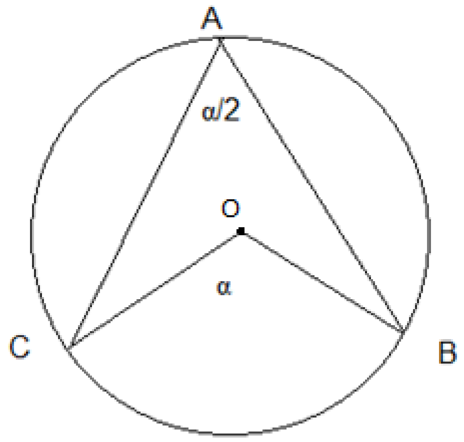


Рис.2

• Вписані кути, які спираються на дуги однакової градусної міри або на спільну дугу, рівні.

• Вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим.

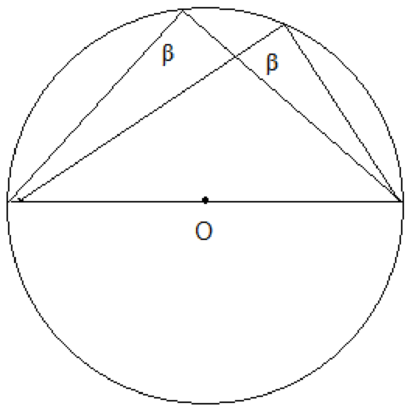


Рис.3

III • Коло, що дотикається до всіх сторін многокутника, називається вписаним у цей многокутник.

• Коло називається описаним навколо многокутника, якщо всі вершини многокутника лежать на цьому колі.

• У чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми протилежних сторін його рівні.

• Навколо чотирикутника можна описати коло тоді і тільки тоді, коли суми протилежних його кутів дорівнюють 180^{o}.

• Центр вписаного у трикутник кола лежить на перетині бісектрис трикутника, а центр описаного на перетині серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника.

• Навколо трапеції можна описати коло тоді і тільки тоді, коли трапеція рівнобічна.

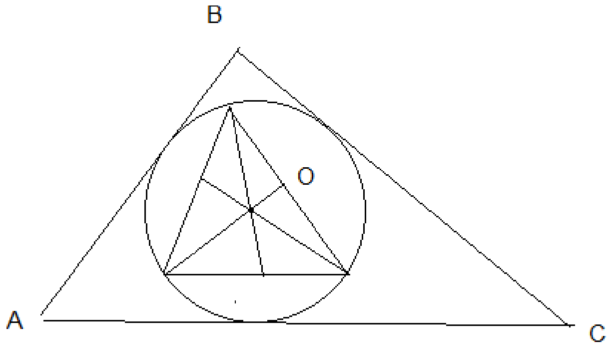


Рис.4

IV • Геометричне місце точок вершин кутів з заданою градусною мірою, сторони яких проходять через дві дані точки, а вершини лежать з одного боку від прямої, що сполучає ці точки, є дуга кола з кінцями в цих точках.

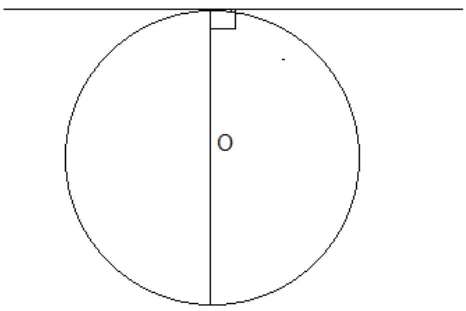
V • Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

• Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

• Якщо точка A лежить поза кругом і прямі AB, AC є дотичними до кола, B і C- точки дотику, тоді AB=AC.(рис.6)

7)

• Гострий кут між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди дорівнює половині кута між радіусами, проведеними до кінців хорди.



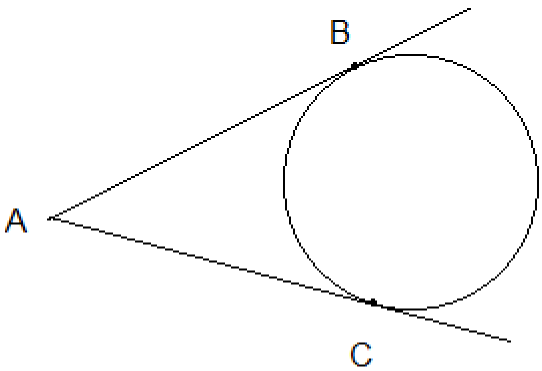


Рис.6

VI Визначні точки і лінії трикутників:

• Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола.

• Бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром вписаного кола.

• Точку перетину медіан трикутника іноді називають центром мас трикутника.

• Точку перетину висот трикутника називають ортоцентром трикутника.

• У кожному трикутнику точка перетину медіан і точка перетину висот лежать на одній прямій з центром описаного кола – прямій Ейлера.

• Середини відрізків, що сполучають ортоцентр трикутника з його вершинами, називають точками Ейлера. Середини сторін трикутника, основи його висот і точки Ейлера лежать на одному колі – колі Ейлера.

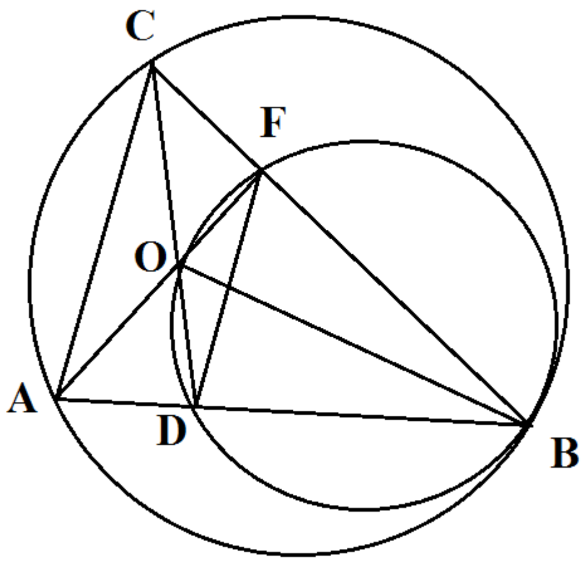
• У колі Ейлера:

1) Центр кола є серединою відрізка, який сполучає центр описаного навколо трикутника кола з ортоцентром трикутника.

2) Радіус кола дорівнює половині радіуса описаного навколо трикутника кола.
3) Точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, лежать на описаному колі цього трикутника.

Задачі

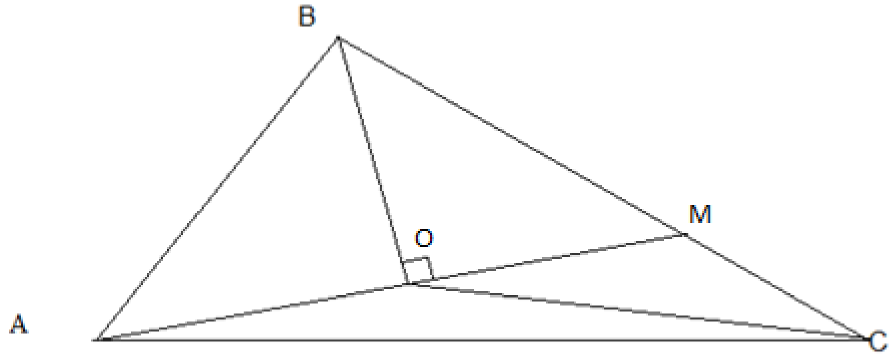
1.(МВШ №2-83р). У ΔABC: $\angle A = 50°$, $\angle C = 70°$ D належить AB, F належить BC. Ці точки розміщені так, що $\angle DCA = \angle FAC = 30°$. Знайти $\angle CDF$.



<u>Розв'язання.</u> 1) AF∩CD=O
2) $\overline{\Delta AOC}$: $\angle CAO = \angle ACO = 30°$, отже CO=AO⇒ $\angle COA$ =180°-60°=120°
3) ΔACB:$\angle C = 70$, $\angle A = 50° \Rightarrow \angle B = 60°$
∠CBA-вписаний, $\angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA$
$\angle COA$ –відповідний центральний, отже O-центр кола, описаного навколо ΔACB.
4) FODB: $\angle FOD = 120°$, $\angle B = 60°$, $\angle FOD + \angle B = 180° \Rightarrow$ навколо FODB описуємо коло.
5) На хорду OF спираються $\angle ODF$ і $\angle OBF$. Вони рівні. Знайдемо $\angle OBF$
OA=OC=OB=r,
CO=OB⇒ $\angle DCF = \angle OBF = \angle CDF = 70°$-30°=40°

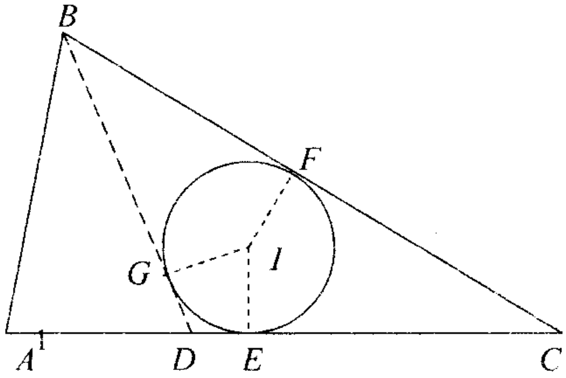
<u>Відповідь:</u> ∠CDF=40°

2.У трикутнику ABC на стороні BC існує така точка M, що BM = 2MC і ∠AMB = 60 º. Знаючи, що ∠BAC = 60 º, знайдіть решту кутів трикутника.



Розв'язання,
1)Побудуємо BO ⊥ AM, ∠MBO = 30 º | ⇒ OM = ½ BM = MC
2) ∠MCO = (180 º -120 º)/2, ∠OMC = 180 º - 120 º = 60 º
3) ∠OBC = ∠OCB | ⇒ OB = OC
4) ∠BOC = 180 º - 2*30 º= 120 º= 2∠BAC | ⇒ O – центр описаного кола. Тому OA = OB = OC, тоді ∠OBA = 45 º , оскільки Δ AOB прямокутний.
5) ∠ABC = 30 º + 45 º = 75 º, ∠ACB = 45 º
Відповідь: ∠ACB = 45 º, ∠ABC = 75 º

3.(ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2011-2012р. м. Суми). У трикутнику ABC проведена бісектриса BD. Відомо, що центр описаного кола навколо ΔABC, співпадає з центром кола, що вписане уΔ BCD. Знайдіть кути ΔABC.



Розв'язання. Позначимо спільний центр вписаного та описаного кіл через I, а точки дотику вписаною кола у ΔBCD до сторін через E, G, F, як це показано на рисунку. Тоді IE та IF - серединні перпендикуляри до сторін AC та BC відповідно, тому $BF= FC$. Тоді з **властивостей дотичних до кола** маємо рівності:

$BG = BF = CF = CE$.

Оскільки $DG = DE$, то $BD = DC \Rightarrow \Delta BDC$ – рівнобедрений. Також маємо, що

$BC = 2CF = 2CE = CA$,

тобто ΔABC також рівнобедрений. Звідси маємо, що

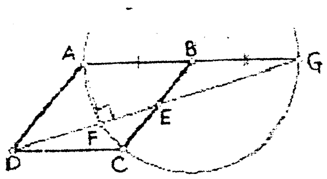
$\angle BAC = \angle ABC = 2\angle DBC = 2\angle BCA \Rightarrow 180° = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 5\angle BCA \Rightarrow$

$\angle BCA = 36°$,

Звідси вже знаходимо відповідь.

Відповідь: $\angle BCA = 36°$. $\angle ABC = \angle CAB = 72°$.

4.(ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2011-2012р). У ромбі $ABCD$ величина кута B дорівнює 40°, E — середина BC,F— основа перпендикуляра, опущенного з точки A на DE. Знайдіть величину кута $\boldsymbol{DFC}$.

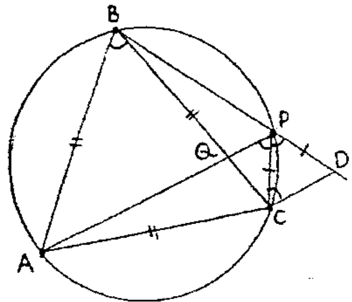


Розв'язання. Нехай прямі DE и AB перетинаються в точці G. Тоді трикутники DEC и GEB рівні (за стороною і двома прилеглими кутами). Тоді $BG = CB = BA$. Тому точки A, G і C **лежать на колі з центром у точці B**, причому AG — діаметр. Оскільки $\angle AFG = 90°$, точка F лежить на тому ж колі.

Маємо: $\angle GFC = \frac{1}{2}\angle GBC = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$.

Тоді $\angle DFC = 180° - \angle GFC = 110°$

Відповідь: 110°

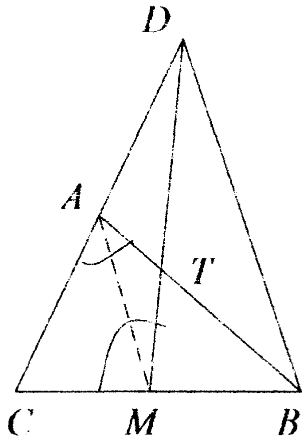


5.(ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2011-2012р). На дузі ВС кола, описаного навколо правильного трикутника АВС, взята точка Р. Відрізки

AP і BC перетинаються в точці Q. Доведіть, що $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$

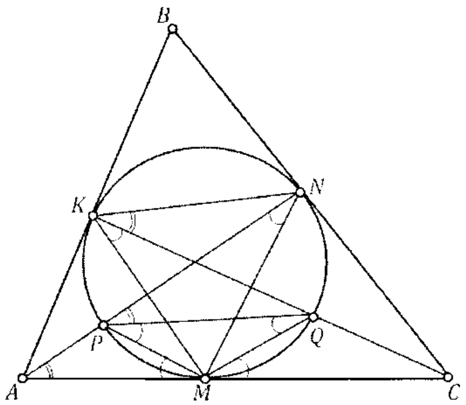
<u>Розв'язання.</u> Продовжимо BP за точку P так, щоб PD=PC. $\angle$BAC=60°, $\angle$BPC+$\angle$BAC =180°, $\angle$BPC=120°, тоді $\angle$CPD=60°.
Трикутник CPD - правильний, $\angle$PCD=60°.
$\angle$APC=$\angle$ABC (вписані та спираються на одну дугу), тоді $\angle$APC=60°.
Отже, $\angle$PCD=$\angle$APC, тоді QP || CD і трикутники BPQ і BDC подібні.
Тоді $\frac{BP}{PQ} = \frac{BD}{DC} = \frac{BP+PD}{DC} = \frac{BP+PC}{PC}$, $\frac{BP}{PQ} = \frac{BP}{PC} + 1 \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$, що й треба було довести.

6.(IV етап LI Всеукраїнської олімпіади з математики, 2011р.). У трикутнику *ABC* точка M - середина сторони BC. на стороні AB відмітили точку N так, що NB = 2AN**.** Виявилось, що $\angle$CAB=$\angle$CMN. Чому дорівнює відношення $\frac{AC}{BC}$?



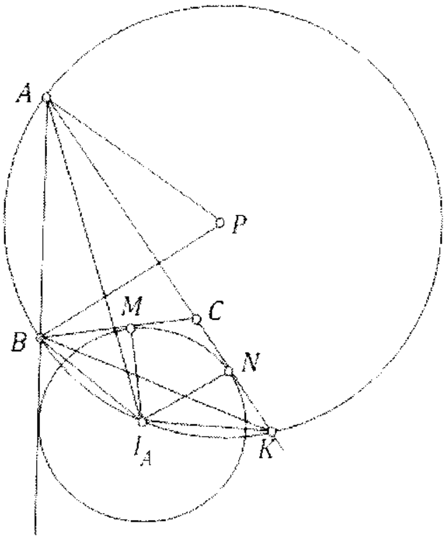
<u>Розв'язання</u> Відкладемо на промені CA точку D таким чином, щоб CA=AD. Тоді для ΔBCD відрізки DM та BA є медіанами, тому в точці перетину T вони діляться у відношенні 2 : 1 , якщо рахувати від вершини. Звідси випливає, що точки T та N збігаються. Тоді $\angle DAB = \pi - \angle DMB$, тому **чотирикутник BMAD - вписаний**. Оскільки AM || BD, як середня лінія трикутника, то $\angle CDB = \angle CAM = \angle CBD$. звідки випливає, що CD=CB, тому $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DC}{DC} = \frac{1}{2}$ Неважко переконатись, що умова задачі справджується для будь-якого трикутника з таким відношенням сторін.
Відповідь: $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$

7.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики, 2012р.). Нехай вписане коло трикутника *ABC* дотикається до його сторін *AB, BC* і *CA* в точках *K, N* і *M* відповідно, причому відомо, що $\angle MKC = \angle MNA$. Доведіть, що трикутник *ABC* рівнобедрений.



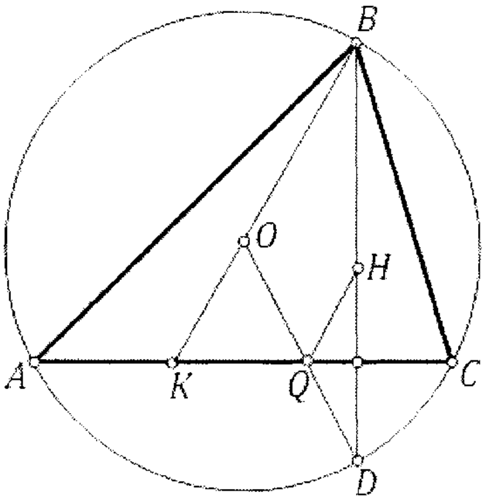
Розв'язання. Нехай прямі AN і CK вдруге перетинають вписане коло трикутника ABC в точках P і Q відповідно. За теоремами **про вписаний кут та кут між дотичною й хордою** одержуємо:
$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA$,
$\angle QKM = \angle QPM = QMC$.
За умовою задачі, $\angle PNM = \angle QKM$, а тому $PQ||AC$. Звідси випливає, що $\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN$, тобто $\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що **навколо чотирикутника $AKNC$ можна описати коло**, і $\angle CAK = \angle BNK$, $\angle ACN = \angle BKN$.
Трикутник KBN є рівнобедреним, тобто $\angle BNK = \angle BKN$. Отже, $\angle CAK = \angle ACN$. ΔABC- рівнобедрений.

8.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики, 2012р.). Дано трикутник ABC. Нехай I_A — центр кола, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за точки B і C відповідно. Доведіть, що точки B, C та центри описаних кіл трикутників ABI_A і ACI_A лежать на одному колі.



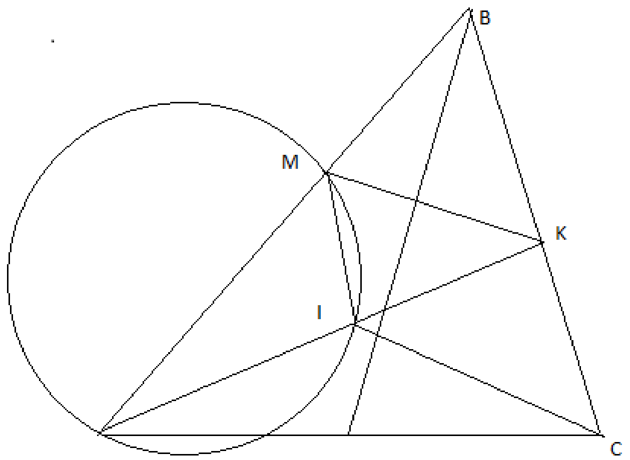
Розв'язання. Нехай точка P — центр описаного кола трикутника ABI_A . Кут ABI_A тупий, а тому точки P і B лежать по різні боки від прямої AI_A. Нехай M і N — точки дотику даного кола зі стороною BC і продовженням сторони AC відповідно, а K — точка перетину цього продовження з описаним колом трикутника ABI_A (див. рис.). Оскільки $I_AM = I_AN$ і $BI_A = KI_A$, то прямокутні трикутники BMI_A та KNI_A рівні, а тому $BM = KN$. Оскільки $CM = CN$, то $BC = CK$, тобто трикутник BCK рівнобедрений. Нехай $\angle BCA = \gamma$, тоді $\angle BKC = \frac{\gamma}{2}$, $\angle BPA = \gamma$. Отже, $\angle BCA = \angle BPA$, а це й означає, що **точка P належить описаному колу трикутника ABC**. Аналогічно доводиться, що центр описаного кола трикутника ACI_A також лежить на цьому колі. Це й завершує доведення.

9.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики, 2012р.). Нехай O — центр описаного кола гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC. Прямі BO і CO перетинають сторони AC і AB в точках K і N відповідно. На сторонах AC і AB взято такі відмінні від K і N точки P і T відповідно, що $OK = OP$ і $ON = OT$. Через точку P проведено пряму, паралельну BK , а через точку T — пряму, паралельну CN, і позначимо через M точку перетину цих прямих. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA рівні.



Розв'язання. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC, точка D симетрична H відносно прямої AC. Як відомо, точка D лежить на описаному колі трикутника ABC. Позначимо через точку Q перетину відрізків OD і AC. Тоді маємо: ∠QDH=∠QHD=∠OBD. Звідси випливає, що $HQ||BK$, і $\angle BKC = \angle HQC$. Отже, ∠HQC=∠DQC=∠OQK=∠BKC, а тому точки P і Q співпадають. Ми довели, що пряма, проведена через точку P паралельно BK, проходить через точку H . Аналогічно доводиться, що точка H лежить і на прямій, що проходить через точку T паралельно CN. Відтак, точка M з умови задачі є ортоцентром трикутника ABC. Рівність радіусів описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA є наслідком властивостей *кола дев'яти точок* (названі трикутники та трикутник ABC мають спільне коло дев'яти точок, а радіус кола дев'яти точок будь-якого трикутника вдвічі менший за радіус його описаного кола). До того ж, рівність радіусів описаних кіл трикутників ABC, AMB, BMC і CMA легко встановлюється за допомогою узагальненої теореми синусів.

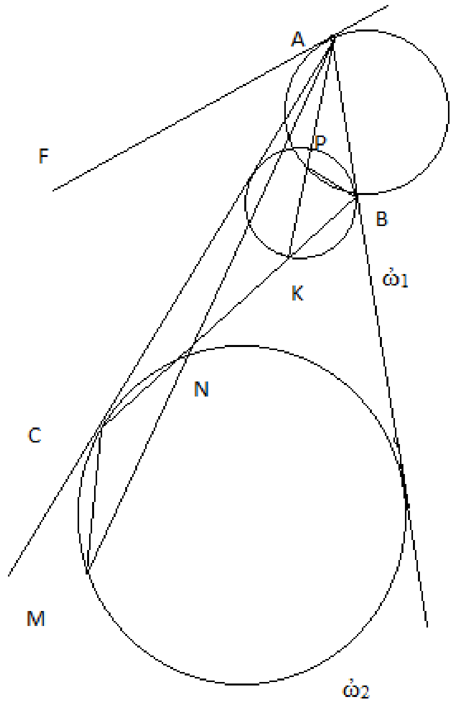
10.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики.)
Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. На стороні AB обрано таку відмінну від вершин точку M, що BM < BC, причому описане коло трикутника AMI перетинає сторону AC в точці
N, яка не співпадає з точками A і C. Доведіть, що BM + CN = BC.



Розв'язання,
Візьмемо на стороні BC таку точку K, що BM = BK . Легко бачити, що ΔBMI = ΔBKI. Оскільки **навколо чотирикутника ANIM можна описати коло**, і ∠MAI = ∠NAI, то MI = NI = KI.
Маємо: ∠BKI = ∠BMI = 180º - ∠AMI = ∠ANI, ΔCNI = ΔCKI.
З того. що ∠NCI = ∠KCl, випливає рівність кутів CIN і CIK . Отже, ΔCNI = ΔCKI .CN = CK, BM + CN = BK + KC = BC.

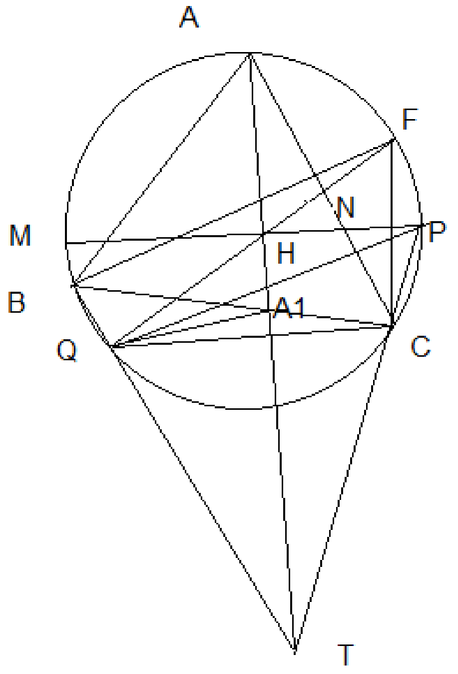
Доведено

11.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики.)
У кут BAC вписано два кола $\dot{\omega}_2$ і $\dot{\omega}_1$, які не мають спільних точок, причому B є $\dot{\omega}_1$, C є $\dot{\omega}_2$ і радіус кола $\dot{\omega}_1$ менший за радіус кола $\dot{\omega}_2$. Пряма BC вдруге перетинає кола $\dot{\omega}_1$ і $\dot{\omega}_2$ в точках K і N . відповідно. Прямі AK і AN проходять, відповідно, через точки P є $\dot{\omega}_1$ і M є $\dot{\omega}_2$ - відмінні від K і N. Доведіть, що точка A лежить на прямій, що проходить через центри описаних кіл трикутників ACM і ABP.



Розв'язання,
Проведемо дотичну AF до описаного кола трикутника APB. Тоді ∠PAF = ∠PBA = ∠PKB, а тому AF ║ BC. Отже, ∠FAC = ∠ACN = ∠CMA. З цього випливає. що пряма AF дотикається до описаного кола трикутника ACM . Оскільки описані кола трикутників ACM і ABP в точці A мають спільну дотичну, то точка A лежить на лінії центрів цих кіл.
Доведено

12.(IV етап LII Всеукраїнської олімпіади з математики.)
Нехай H - точка перетну висот гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC, M - середина сторони AB, N - середина сторони AC. Позначимо через відповідно, P і Q точки перетину променів MH і NH з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що прямі BQ, AH і CP перетинаються в одній точці або паралельні.



Розв'язання,

1)Нехай AA_1 — висота трикутника ABC. Розглянемо випадок, коли прямі BQ і CP перетинаються в деякій точці T. Нам потрібно довести, що точка T лежить на прямій AA_1. Розглянемо спочатку випадок, коли точки A і P лежать по один бік від прямої BC, а точки A I Q — по різні боки від прямої BC (див. рис).

2)Як відомо, **точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, лежать на описаному колі цього трикутника**: насправді, якщо в трикутнику ABC точка F симетрична ортоцентру H відносно середини N сторони AC, то $\angle AFC = \angle AHC = 180° - \angle ABC$. Далі, оскільки $FC \parallel AH$, то $\angle FCB = 90°$, і точки B і F діаметрально протилежні. Отже, $HQ \perp BT$. Аналогічно доводиться, що $HP \perp CT$. Чотирикутники HQTP і BQA_1H циклічні. А тому маємо: $\angle QBC = \angle QHA_1$, $\angle QHT = \angle QPC$. Оскільки $\angle QPC = \angle QBC$, то $\angle QHT = \angle QHA$, що і завершує доведення.

3)Якщо хорда PQ і точка A лежать по різні боки від прямої BC, то $\angle QBC = \angle QHA_1$, $\angle QHT = \angle QPT$. $\angle QPT = (\breve{QP} + \breve{PC})/2 = \angle QBC$.

4)Аналогічно розглядаються інші випадки розташування точок P і Q на описаному колі трикутника ABC.

Якщо прямі BQ і CP паралельні, то неважко довести, що точка H лежить на відрізку MN,точки P і F співпадають, і тому $AH \parallel PC$.

Доведено

LXVIII Київська міська олімпіада юних математиків

1. Відрізок AB – діаметр кола. Точки M та C належать цьому колу і розташовані у різних півплощинах відносно прямої AB. З точки M проведені перпендикуляри MN і MK на прямі AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма KN перетинає відрізок CM у його середині.

Розв'язання. Проведемо відрізки BC, AM. Тоді навколо чотирикутника $AKNM$ можна описати коло (рис. 8). Тому

$$\angle NAM = \angle NKM = \angle BCM .$$

Оскільки $BC \perp AC$, то $MK \parallel BC$. Тому $\angle CMK = \angle BCM$. Звідси $\angle CMK = \angle NKM$. Отже ΔKMQ – рівнобедрений $KQ = QM$, тобто у прямокутному ΔCKM $KQ = QC = QM$, що й треба було довести.

LXVIII Київська міська олімпіада юних математиків

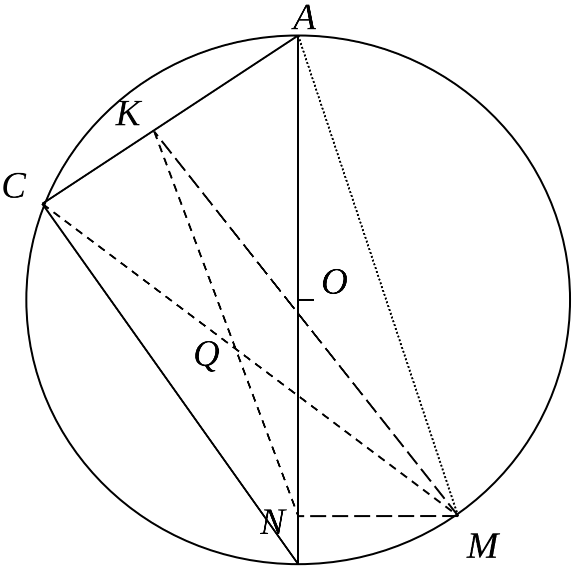


Рис. 8

2. Два кола w_1, w_2 дотикаються зовнішнім чином у точці Q. Спільна зовнішня дотична цих кіл дотикається w_1 у точці B, BA – діаметр цього кола. Через точку A проведена дотична до кола w_2, що дотикається цього кола в точці C, такій, що точки B та C лежать у одній півплощині відносно прямої AQ. Доведіть, що коло w_1 ділить навпіл відрізок BC.

Розв'язання. Нехай точка K – точка дотику дотичної до кола w_2 (рис. 6). Проведемо також через точку Q спільну внутрішню дотичну кіл. Нехай вона перетинає дотичну BK в точці P. Тоді з властивостей дотичної кола

$$PB = PQ = PK .$$

Тому $\angle BQK = 90°$, крім того, $\angle AQB = 90°$, оскільки AB – діаметр.

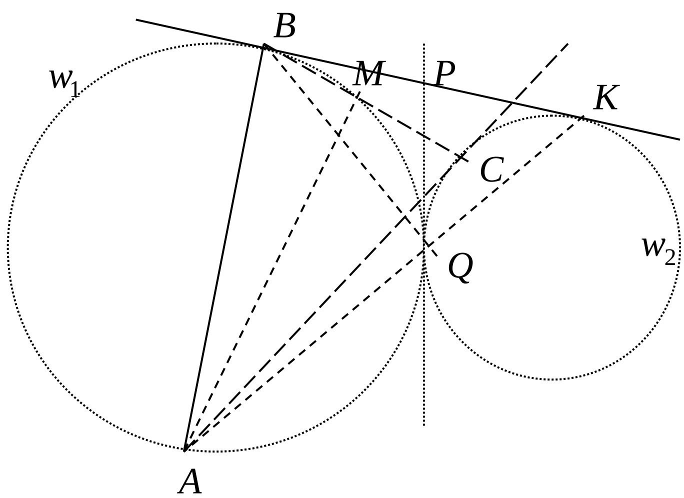


Рис. 6.

Тому точки A, Q, K лежать на одній прямій. За умовою задачі $AB \perp BK$, тому

$$AB^2 = AQ \cdot AK \text{ та } AC^2 = AQ \cdot AK$$

(з властивостей прямокутного ΔABK та з властивостей дотичної та січної кола w_2). Тому $AB = AC$. Нехай w_1 перетинає BC у точці M. Тоді $\angle BMA = 90°$, тобто AM – висота рівнобедреного ΔABC. Звідси $BM = MC$, що й треба було довести.

Література

1. Бурда М.І., Савченко Л.М.Геометрія 8-9.Навчальний посібник для 8-9 класів шкіл з поглибленим вивченням математики.- К.: Освіта, 1996.- 240с.
2. Лоповок Л.М. Сборник задач по геометрии 6-8.- К.: Радянська школа, 1985.-104с.
3. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія 7-9. Поглиблений курс.- К.: Ірпінь, 1999.-350с.
4. Ізаак Д.Ф., Обобщение задач по геометрии// Математика в школе.- 1983.- №2.- с.55.
5. Матеріали IV етапів LI,LII Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики.
6. Матеріали LXVIII Київської міської олімпіади юних математиків.
7. Матеріали II,III етапів Всеукраїнської олімпіади з математики 2011-2012р. м. Суми, Сумська область.