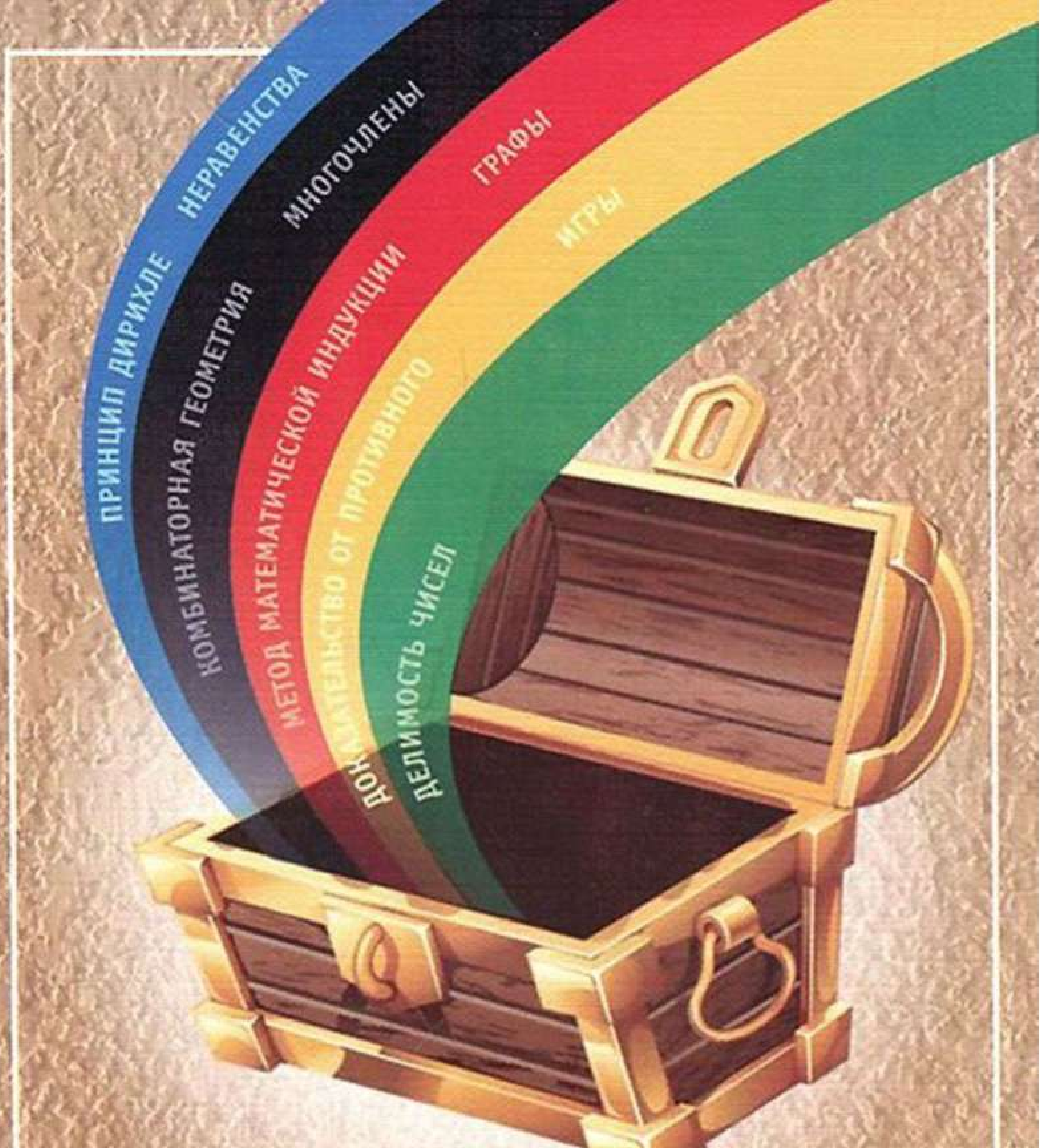

ОЛИМПИАДНЫЙ КОВЧЕГ

А. Я. Канель-Белов
А. С. Трепалин
И. В. Ященко

А. Я. Канель-Белов
А. С. Трепалин
И. В. Ященко

Олимпиадный ковчег

Издательство МЦНМО
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
К19

Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Ященко И. В.
К19 Олимпиадный ковчег. — М.: МЦНМО, 2014. — 56 с.

ISBN 978-4439-0329-3

В книге собраны примеры задач различного уровня сложности — от начальных до довольно сложных — на большинство наиболее важных тем, встречающихся на математических олимпиадах. По многим сюжетам даны краткие теоретические сведения, иногда затрагивающие интересные математические сюжеты.

Книга содержит богатый материал, дополняющий школьную программу, может быть использована в математических кружках, элективных курсах, внеклассной работе. При подготовке к математическим олимпиадам будет полезна как начинающим, так и «олимпиадным профессионалам» для повторения.

Книга рассчитана на школьников 9—11 классов, учителей, руководителей кружков. Будет интересна и школьникам более младших классов, и всем любителям математики.

ББК 22.1я72

Канель-Белов Алексей Яковлевич
Андрей Сергеевич Трепалин
Иван Валериевич Ященко

ОЛИМПИАДНЫЙ КОВЧЕГ

Подписано в печать 14.02.2014 г. Гарнитура Charter ITC. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-74-83, (495) 745-80-31.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-4439-0329-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для успешного выступления на олимпиадах высокого уровня помимо творческих способностей необходима серьезная подготовка. Олимпиады демонстрируют школьнику разнообразие математики (математика — это не только квадратные уравнения, но и шахматная доска, и различные игры вроде морского боя, крестиков-ноликов и т. п.), и такая гибкость оказывается очень важной в дальнейшей карьере, чем бы человек в дальнейшем ни занимался. Поэтому от участника требуется, с одной стороны, перестать бояться непривычных формулировок, а с другой стороны — знать специфические факты и приемы, владеть типичными методами решения задач, обладать вычислительными навыками.

Часто случается, что даже сильные школьники выступают на олимпиадах недостаточно успешно из-за незнания этих приемов и фактов. Цель сборника — помочь читателю не попасть в такую ситуацию.

Сборник составлен из задач, позволяющих вам оценить вашу олимпиадную подготовку. Мы старались обойтись минимумом ключевых задач, которые подготовленный человек должен уметь решать.

Как в географии, изучая промышленность страны, можно сосредоточить внимание на отдельных отраслях в стране в целом, а можно исследовать структуру промышленности в каждом отдельном регионе, так и в математике для решения задач полезно иучать и общие методы решения задач, и отдельные тематические разделы. Данная книга состоит из двух частей. В первой части — основные методы решения задач, во второй — разделы по темам.

При создании подборки задач мы старались использовать математический фольклор, отобрав задачи, которые особенно часто используются при работе кружков и являются ключевыми для понимания данной темы.

В данном сборнике мы не касались классической планиметрии и стереометрии, рекомендуя читателю книгу Р. К. Гордина «Это должен знать каждый матшкольник». Также данный сборник не ставит своей целью развитие вычислительных навыков, культуры выкладок — умений, необходимых каждому учащемуся, которые должны быть доведены до автоматизма у школьника, претендующего на успешное выступление на олимпиадах. Для развития этих умений помимо проработки школьного материала советуем обратиться к старинным занимательным задачам.

Авторы выражают благодарность Ф. Петрову за помощь в подборке задач по теме «Неравенства» и И. Митрофанову за полезные обсуждения.

Мы благодарны читателям за любую критику и замечания, которые будут учтены в следующих изданиях, ибо подготовительные сборники (как и, например, программные продукты) создаются методом последовательных приближений.

Часть I. МЕТОДЫ

Задачи на логику

Логика — основа математической культуры, она используется при решении любых математических задач. Задачи на логику можно давать даже детям дошкольного возраста, ведь для их решения зачастую достаточно здравого смысла.

1. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

2. Ира, Таня, Коля и Андрей собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

3. Профессор хочет доказать равносильность n утверждений. Он задает своим аспирантам темы диссертационной работы вида: «Докажите, что из утверждения с номером k следует утверждение с номером l». Нельзя защищать диссертацию, являющуюся прямым логическим следствием из защищенных ранее. Какое максимальное число аспирантов может защититься у профессора?

Экзотические примеры и конструктивы

Задачи на построения примера той или иной конструкции изучаются рано, поскольку, как правило, не требуют проведения доказательного рассуждения. В то же время задачи, требующие построить экзотический пример, на олимпиадах высокого уровня очень часто ставят участников в тупик, поскольку вместо этого они только пытаются доказать, что такого не бывает, и это у них, естественно, не получается.

1. Ученики в классе различаются весом, ростом и размером обуви (т. е. найдутся два ученика разного роста, двое разного веса и двое с разным размером обуви). Верно ли, что найдутся три ученика, для которых верно следующее: не все они одного роста, не все они одного веса и не у всех один и тот же размер обуви?

2. На чемпионате по фигурному катанию судьи выставляют фигуристам оценки. Может ли так случиться, что большинство судей

поставили фигуристу A более высокие оценки, чем фигуристу B, большинство судей поставили фигуристу B более высокие оценки, чем фигуристу C, и большинство судей поставили фигуристу C более высокие оценки, чем фигуристу A?

3. Барон Мюнхгаузен хвастается, что каждый день у его жены улучшается либо лицо, либо фигура, а не менее 6 дней в неделю — оба эти параметра одновременно. Кроме того, за десять лет его жена совершенно не изменилась. Могут ли слова барона быть правдой?

Доказательство от противного

Один из базовых приемов доказательства — доказательство от противного. Предполагается, что утверждение задачи неверно, а далее при помощи логических рассуждений показывается, что из этого предположения получается противоречие с исходными данными.

1. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
2. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.
3. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого больше трех острых углов?
4. Докажите, что если 17-угольник переходит в себя при некотором повороте на положительный угол, меньший 360°, то этот 17-угольник правильный.

Обратный ход

Если в задаче задана некоторая операция и по результату этой операции восстанавливается предшествующее состояние, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. (Например, надо вынести фигурный холодильник из кухни. Пройдет ли он через дверь? Пройдет, потому что через дверь его внесли.) Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

1. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

2. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И, наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

3. Петя умеет умножать число на 2 и переставлять в числе цифры местами. Сможет ли он получить из числа 1 число 209?

Подсчет двумя способами

При составлении уравнений некоторую величину (например, путь или время) выражают двумя различными способами. Иногда при выражении или оценке одной и той же величины двумя различными способами возникает противоречие. Например, полученные разными способами значения величины могут иметь разную четность, или в результате одного способа оценки величина меньше некоторого числа, а в результате другого больше этого же числа. Полученное таким образом противоречие является доказательством невозможности существования объекта, удовлетворяющего условиям задачи.

1. Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5×5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

2. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

3. Докажите, что не существует многогранника, у которого а) все грани — шестиугольники; б) в каждой вершине сходятся 6 граней.

Оценка плюс пример

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения некоторой величины часто встречаются на олимпиадах. Решение такой задачи состоит из двух частей: примера, когда величина достигает нужного значения, и оценки, показывающей, что полученное в примере значение величины — нужное. Распространенной ошибкой у неопытных школьников является отсутствие одной из этих двух частей. При этом в отношении другой части школьниками часто употребляется аргумент «ну, это же очевидно!», зачастую приводящий к неверному ответу. При решении таких задач следует внимательно следить, чтобы обе части присутствовали и были обоснованы.

1. Какое наибольшее число трехклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

2. Каким наименьшим количеством монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?

3. Количество девочек, записанных в школьный математический кружок, составляет более 40%, но менее 50% от общего числа учеников. Какое наименьшее количество учащихся может быть в этом кружке?

4. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5. На какое наибольшее количество попарно различных прямоугольников с вершинами в узлах сетки можно разбить этот квадрат?

Соответствие

Для решения задач бывает полезно установить взаимно однозначное соответствие между двумя множителями. Например, задается вопрос про сложно устроенное множество, элементы которого соответствуют элементам множества, устроенного более просто. При этом если на множествах задана какая-либо структура (например, операция сложения), то особый интерес представляют соответствия, сохраняющие эту структуру.

1. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

2. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения (не считая вершин) имеют диагонали этого n-угольника?

3. Докажите, что дроби $2000/2009$ и $9/2009$ имеют одинаковую длину периодов.

4. Найдите сотую цифру после запятой числа $(2+\sqrt{3})^{1000}$.

5. Докажите, что уравнение

$$2+\sqrt{5}=(\alpha_1+\beta_1\sqrt{5})^2+(\alpha_2+\beta_2\sqrt{5})^2+(\alpha_3+\beta_3\sqrt{5})^2$$

не имеет решений в рациональных числах α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3.

Математическая индукция

Для доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что...» используется метод математической индукции. Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n=1$ верно, что...», «Для $n=2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или основанием) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *индуктивный переход* (или шаг индукции): «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $n+1$». Индуктивный переход также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции и верен индуктивный переход, то утверждения для всех n верны. Это *принцип математической индукции*.

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на все предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно утверждение с номером $n+1$».

Иногда удобен *индуктивный спуск* — если утверждение с номером n ($n>1$) можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

1. Докажите, что любое целое число рублей, большее семи, можно разменять монетами по 3 и 5 рублей.

2. Из квадрата 128×128 вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трех клеток.

3. На плоскости провели несколько прямых. Докажите, что части, на которые рассечена плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (у которых есть общий отрезок, луч или прямая) были покрашены в разные цвета.

4. Докажите, что состоящее из 243 единиц число делится на 243.

5. Известно, что число $x + 1/x$ целое. Докажите, что число $x^n + 1/x^n$ тоже целое.

6. Докажите равенство $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.

Принцип Дирихле

В простейшем виде этот принцип выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух кроликов».

Общая формулировка: «Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдется ящик, в котором сидят не меньше чем n/k кроликов, и найдется ящик, в котором сидят не больше чем n/k кроликов».

1. В классе 25 человек. Вася сделал 11 ошибок в контрольной, зато остальные — меньше. Докажите, что найдутся трое учеников, сделавших одинаковое число ошибок.

2. На Земле больше 4 миллиардов человек, которые моложе 100 лет. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся в одну и ту же секунду.

3. Докажите, что в любой компании найдутся два человека с одинаковым числом знакомых в этой компании.

4. Докажите, что из любых 15 целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на 14.

Зачастую применение принципа Дирихле требует дополнительных соображений.

5. Петя хочет написать на доске 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100. Сможет ли он это сделать?

6. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные в одинаковый цвет.

7. На плоскости проведено 12 попарно непараллельных прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15°.

8. На плоскости отмечено 5 точек с целыми координатами. Докажите, что среди них найдутся две такие, что середина соединяющего их отрезка имеет целые координаты.

9. На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в Мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

Инварианты

Инвариант — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому этими операциями. В качестве инварианта может использоваться *четность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (возрастание или убывание). Используется при доказательствах остановки процессов.

Четность. Одним из наиболее распространенных в олимпиадных задачах инвариантов является четность. Если некоторая величина в результате действий, разрешенных условием задачи, сохраняет четность, то от изначального положения нельзя перейти к положению, где эта величина имеет иную четность.

1. В угловой клетке таблицы 8×8 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

Раскраски. Говорят, что фигура *покрашена в несколько цветов*, если каждой точке фигуры приписан определенный цвет. Бывают задачи, где раскраска уже дана, например для шахматной доски, бывают задачи, где раскраску с данными свойствами нужно придумать, и бывают задачи, где раскраска используется как идея решения.

2. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на фишки домино 1×2.

3. Можно ли все клетки доски 9×9 обойти шахматным конем по одному разу и вернуться в исходную клетку?

4. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 4×1?
5. Можно ли шахматным конем обойти доску 7×6?

Иные инварианты. Часто в задачах встречаются иные инварианты: остаток величины от деления на какое-то число, площадь и др. Идеи решения многих сложных задач строятся на нахождении «нетипичного» инварианта, поэтому умение видеть такие инварианты следует развивать.

6. Хулиган Вася рвет газету на 4 либо на 7 частей, а потом какие-то из получающихся кусков — тоже на 4 или 7 частей. Может ли он в результате своих действий получить из одной газеты 2009 кусков?
7. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если 2 хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?
8. Можно ли круг разрезать на несколько частей, из которых можно было бы сложить квадрат? (Разрезы проводятся по прямым и дугам окружностей.)
9. Во время футбольного матча нашлись два момента, когда игроки находились на одних и тех же местах (возможно, что при этом какие-то игроки поменялись позициями между собой). При этом расстояния между любыми двумя из них не уменьшились. Докажите, что эти расстояния не изменились.

Процессы и полуинварианты

Пусть требуется найти конфигурацию, когда некоторая величина, принимающая целые значения, удовлетворяет определенному неравенству. Если для каждой конфигурации, для которой неравенство не достигнуто, существует «элементарное» преобразование, изменяющее требуемую величину в сторону требуемого условия, то, очевидно, требуемая конфигурация достигается из произвольной в процессе последовательного применения «элементарных» преобразований. Такая величина называется *полуинвариантом*.

Важно воздержаться от использования величин, похожих на полуинварианты, в задачах на нахождение максимума или минимума. Распространено ошибочное рассуждение, что если в результате применения любого «элементарного» преобразования величина уменьшается, то это и есть максимум. При таком рассуждении школьники не учитывают, что хоть первое из «элементарных» преобразований уменьшает величину, последующие преобразования могут ее увеличить и даже сделать больше, чем она была изначально.

1. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, были неотрицательны.

2. В парламенте у каждого депутата не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

3. На фестивале патриотической песни собралось n делегаций от разных стран. Каждый день ровно одна делегация поет свою песню и уезжает, а все делегации, еще не выступившие, ее слушают. Оказалось, что каждая песня оскорбительна не более чем для 3 других стран-участниц. Докажите, что можно так составить расписание, чтобы каждая делегация выслушала бы не более трех оскорблений.

4. На плоскости отмечены N точек. Постройте замкнутую ломаную без самопересечений, проходящую через каждую отмеченную точку.

Правило крайнего

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай.

В задачах на правило крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно еще уменьшить, то получится искомое противоречие.

1. По кругу расставлены числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все эти числа равны.

2. Остров разбит на треугольники. Докажите, что эти треугольники можно раскрасить в три цвета так, чтобы треугольники с общей стороной были бы покрашены в разные цвета.

3. Плоскость разрезана вдоль $n \geqslant 3$ прямых, среди которых нет параллельных и нет трех прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

4. Докажите, что число
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$
не является целым.

5. Докажите, что из попарно различных кубов не составить кирпич.

Асимптотика. Правилу крайнего родственно рассмотрение ситуации на бесконечности (в *асимптотике*). Если на бесконечности одна величина больше другой, то найдется и конечное значение аргумента, при котором первая величина будет больше второй. При рассмотрении ситуации в асимптотике важно правильно оценивать порядок роста величин.

6. На плоскости отмечено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой отмеченной прямой будет меньше, чем до любой из отмеченных точек.

7. Дан параллелограмм с вершинами в точках с целыми координатами, причем внутри или на границе больше нет точек с целыми координатами. Докажите, что его площадь равна единице.

8. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такой, что уравнение $P(m)+P(n)=0$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Докажите, что у графика функции $y=P(x)$ есть центр симметрии.

9. Докажите что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

Вариационный принцип. Иногда, чтобы показать существование объекта с какими-то хорошими свойствами в некотором непрерывном семействе, бывает полезно рассмотреть произвольный объект в этом семействе и непрерывно изменять его (вращать, сжимать, двигать) до тех пор, пока не получится объект с требуемыми свойствами.

10. Докажите, что для любой выпуклой фигуры Ф с гладкой границей существует замкнутая вписанная ломаная, для каждой вершины A которой пара соответствующих звеньев имеют равные углы с касательной к границе фигуры Ф в точке A.

11. Докажите, что для любой выпуклой фигуры существует описанный k-угольник, стороны которого делятся точками касания пополам.

12. Дано выпуклое тело. Докажите, что на его поверхности можно отметить 4 точки так, чтобы касательная плоскость к каждой точке была бы параллельна плоскости, соединяющей остальные три.

13. На плоскости отмечено несколько точек общего положения. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из них и содержащая остальные внутри себя (или проходящая через них).

14. Докажите, что существует ребро тетраэдра, к которому примыкают только острые углы.

15. Из резисторов собрана цепь. Докажите, что сопротивление не уменьшится, если, ничего не размыкая, какие-то две точки соединить еще одним резистором.

16. Докажите, что квадратные корни из простых чисел линейно независимы над множеством рациональных чисел (т. е. никакая их сумма с рациональными коэффициентами, не все из которых равны нулю, не равна нулю).

Причесывание задач (или «Можно считать, что...»)

Грамотный подход к решению задач экономит время и позволяет разобраться со сложно сформулированными задачами. Подготовка задачи может состоять в переформулировке условия на более удобном языке (например, на языке графов), отщеплении простых случаев, сведении общего случая к частному (например, переход к максимуму или минимуму некой величины).

Такие преобразования сопровождаются фразами «в силу симметрии», «явно не хуже», «для определенности полагаем», «не нарушая общности», «можно считать, что», «в худшем случае»... При этом такой переход должен быть обоснован, потому что иначе может получиться разбор одного частного случая, не являющийся продвижением в решении.

1. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5. Докажите, что во всем классе мальчиков не больше 4/7.

2. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

Цикличность

Доказательство периодичности основано на следующих соображениях.

«Прямой ход»: если нечто принимает конечное число состояний, состояния меняются во времени и каждое состояние однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то состояния начнут периодически повторяться (возможно, с *предпериодом*).

1. Найдите последнюю цифру числа 2^{1000}.

«Обратный ход»: если каждое из конечного числа состояний однозначно определяет состояние в предыдущий момент времени, то состояния начнут периодически повторяться без предпериода.

2. Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 17?

3. Некоторая комбинация поворотов вывела кубик Рубика из начального положения. Докажите, что если ее повторить несколько раз, то кубик Рубика снова соберется.

4. В лабиринте, по которому гуляет Минотавр, в каждую комнату ведет три коридора. Минотавр попеременно поворачивает то направо, то налево. Докажите, что он рано или поздно придет в исходную комнату.

«Почти возвращаемость» и обмотки тора. В непрерывном случае вместо возвращаемости зачастую имеет место «почти возвращаемость», приводящая к «почти периодичности», т. е. последовательность оказывается сколь угодно близка к своему началу, но не совпадает с ним.

5. Докажите, что функция $\sin(x)+\sin(\sqrt{2}x)+\sin(\sqrt{3}x)$ непериодична. Когда функция $\sum a_n \sin(\alpha_n x)$ периодична?

6. Докажите, что при иррациональном α для каждой точки a единичного отрезка и любого наперед заданного положительного числа ε найдется точка вида $\{\alpha n\}$, такая что $|a-\{\alpha n\}|<\varepsilon$ (n — целое число, $\{x\}$ — дробная часть x).

7. Докажите, что 2^n может начинаться с любой комбинации цифр.

Фазовое пространство

Рассмотрение множества возможных ситуаций как единого целого и его удачное описание часто оказывается полезным (см. также темы «Графы», «Теория информации», «Периодичность»). Эта идея активно работает как в чистой математике, так и в прикладной математике и физике. Например, в теории оптимального управления рассматривают «область достижимости», т. е. множество ситуаций, достижимых из данного положения.

1. Даны три сосуда вместимостью 6, 7 и 12 литров. Два меньших сосуда заполнены. Можно ли в большом сосуде отмерить 9 литров воды?

2. Монах с 6 утра до 6 вечера поднимался в гору и там ночевал. На следующий день с 6 утра до 2 дня он спускался по той же дороге. Докажите, что в пути было такое место, где он находился в одно и то же время и на подъеме и на спуске (монах часто отдыхал и шел неравномерно).

3. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины $2l$, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Теория информации

В некоторых задачах за конечное число испытаний (взвешиваний на чашечных весах, вопросов с ответом «да/нет») требуется получить ответ на нужный вопрос (найти фальшивую монету, отгадать задуманное число). В таких задачах важно понимать, что ответ на итоговый вопрос должен однозначно кодироваться ответами на вопросы-испытания. Например, за одно взвешивание на чашечных весах нельзя обнаружить фальшивую монету среди четырех, поскольку вариантов ответа 3, а вариантов для фальшивой монеты четыре.

В таких задачах стратегию стоит выстраивать, чтобы при очередном испытании количество вариантов ответа на нужный вопрос разделялось примерно поровну, иначе может возникнуть ситуация, когда оставшейся информации не хватит, чтобы закодировать возможные ответы. Если же показать, что возникновение такой ситуации неминуемо, то это означает, что испытаний нужно больше.

1. Двое играют в такую игру. Первый загадывает число из первой сотни, а второй пытается его угадать, задавая вопросы, причем первый отвечает на них только «да» или «нет». Какое минимальное число вопросов необходимо задать второму, чтобы наверняка угадать число?

2. Из 27 монет одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний на весах с двумя чашами можно найти фальшивую монету, если известно, что она легче настоящих?

3. Из 12 монет одна фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее остальных. За какое минимальное число взвешиваний на двухчашечных весах можно найти монету и определить, легче она или тяжелее?

4. Толя загадал число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы вида: «Верно ли, что твое число меньше m?». Толя честный мальчик, поэтому он всегда говорит правду, при этом он немного заторможенный, поэтому на всякий новый вопрос он отвечает верным ответом на предыдущий. После последнего вопроса Толя сразу дает ответы на предпоследний и последний вопросы. Какое минимальное количество вопросов нужно задать, чтобы наверняка узнать, какое число загадал Толя?

Катастрофы

Пусть у нас есть некоторая дискретная величина, которая зависит от непрерывного параметра. В этом случае имеет смысл рассмотреть и изучить моменты «катастрофы», когда величина изменяется. Понимание того, в каком случае и каким образом это происходит, полезно в решении задач.

1. Даны точки A и B на окружности. Найдите ГМТ (геометрическое место точек) середин хорд, одна из вершин которых находится на дуге AB, другая — на дуге BA.

2. Квадрат разбит на прямоугольники. *Цепочкой* называется такое подмножество K множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата A, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку A не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из K. Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку. Аналогичная задача для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).

3. *Округление* числа — это замена его любым из целых, между которыми оно заключено. Докажите, что можно так округлить числа из таблицы $n \times k$, чтобы суммы по строкам и по столбцам также округлились.

4. В городе N девять высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке по часовой стрелке. Для любого ли заданного порядка это возможно?

Линейность

Линейность, теорема Хана—Банаха и счет размерностей. Множество, в котором определены операции сложения и умножения, обладающие свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, а также есть 0 (элемент, для которого $a + 0 = a$ для любого a), 1 (элемент, для которого $a \cdot 1 = a$ для любого a) и для каждого элемента определены противоположный и обратный, называется *полем*. Полями являются, например, рациональные, действительные и комплексные числа, остатки по простому модулю p.

Для некоторого поля F рассмотрим множество наборов из n элементов поля. Такие наборы можно почленно складывать и умножать на элементы из поля. Подобные объекты называются *линейными пространствами* над полем F. Если линейное пространство порождено конечным числом элементов, т. е. любой его элемент получается как конечная сумма этих элементов, взятых с определенными коэффициентами из поля, то такое линейное пространство можно некоторым способом отождествить с n копиями F с почленными сложением и умножением на число. При этом число n однозначно определено и называется *размерностью* пространства.

1. На табло есть n лампочек и несколько кнопок, каждая из которых соединена с некоторыми лампочками (с одной лампочкой может быть соединено несколько кнопок). Нажатие на кнопку меняет состояние всех соединенных с ней лампочек на противоположное. Докажите, что число узоров, которые мы можем получить, есть 2^k для некоторого k.

2. *Инвариантом* будем называть такое подмножество лампочек, что каждая кнопка соединена с четным числом лампочек из него. Докажите, что число инвариантов (учитывая пустое подмножество) есть степень двойки. Докажите, что некоторый узор можно зажечь тогда и только тогда, когда в каждом инварианте надо зажечь четное число лампочек.

3. Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ выражается через $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ как многочлен с целыми коэффициентами.

Линейность и принцип максимума. Пусть у нас есть кусочно-линейная функция, т. е. функция, в выражении которой используются только переменные, умножение на константы, прибавление констант и знаки модуля (локально такая функция просто является линейной функцией нескольких переменных). Тогда функция достигает своих наибольших или наименьших значений только в точках излома (где один из модулей обращается в 0) или на границе рассматриваемой области.

4. Известно, что сумма модулей попарных разностей набора неотрицательных чисел равна 1. Найдите наименьшее возможное значение суммы этих чисел.

5. На складе 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых. Кроме того, левых и правых поровну. Докажите, что можно составить как минимум 50 правильных пар.

6. По кругу расставлено k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; $a_1 = 1$, $\sum a_i = 0$.

а) Докажите, что найдутся два соседних числа, отличающиеся не менее чем на $4/k$.

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/k^2$. На какую бо́льшую константу можно заменить число 8?

Линейность площадей. Всем известно, что площадь треугольника выражается формулой $S=\frac{1}{2}ah_a$, где a — длина стороны треугольника, а h_a — длина высоты, проведенной к этой стороне. Зафиксируем теперь эту сторону, а третью вершину треугольника будем двигать по некоторой прямой. Тогда из формулы следует, что при движении вершины вдоль прямой изменение площади пропорционально длине отрезка, на который мы сдвигаем вершину. Это простое соображение в сочетании с принципом максимума полезно при решении геометрических задач.

7. Диагонали отрезают от пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади исходного пятиугольника.

8. Вершины некоторого треугольника лежат на сторонах многоугольника M. Докажите, что найдется треугольник большей площади, вершины которого лежат в вершинах M.

Часть II. ТЕМЫ

Комбинаторная геометрия

Покрытия и упаковки. Говорят, что фигура A покрыта фигурами U_i, если каждая точка фигуры A содержится хотя бы в одной фигуре U_i. Покрытие фигуры допускает перекрытие, т. е. одна точка фигуры может покрываться любое число раз. Упаковка — это размещение нескольких фигур внутри одной без перекрытия.

1. Можно ли покрыть правильный треугольник двумя правильными треугольниками меньшего размера? (См. раздел «Фазовое пространство».)
2. На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее $8/15$ площади стола.
3. Какое наименьшее число королей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они били все клетки?

Теорема Хелли. Пусть на плоскости есть конечное множество выпуклых фигур таких, что каждые три имеют общую точку. Теорема Хелли утверждает, что у этих фигур найдется общая точка.

4. На плоскости отмечено n точек так, что любые три из них можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все n точек можно покрыть кругом радиуса 1.
5. Докажите, что внутри любого выпуклого 7-угольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его подряд идущих вершин.
6. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что найдется такая (не обязательно отмеченная) точка M, что любая прямая l, проходящая через M, делит плоскость на части, в каждой из которых не менее $n/3$ отмеченных точек. (Точки на границе включаются в обе части.)

Замощения и разбиения. *Замощение* — покрытие без перекрытий, как правило, одинаковыми фигурами. *Разбиение* — представление множества в виде объединения непересекающихся подмножеств.

7. За какое наименьшее количество выстрелов можно с гарантией подбить четырехклеточный корабль при игре в морской бой?

8. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не меньше $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

9. Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

Игры

Задачи на игры часто встречаются на олимпиадах. Как правило, играют двое игроков и требуется определить, кто из них выиграет вне зависимости от игры противника. Таким образом, можно считать, что игроки *играют наилучшим образом*. Основные идеи доказательства чьей-то победы или ничейного исхода — идеи соответствия, решения с конца и передачи хода. Тем не менее, решения задач на игры не ограничиваются этими идеями и их комбинациями.

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа) определяет выигрышную стратегию.

1. Двое кладут по очереди пятаки на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередной пятак. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

2. В крайних клетках полоски 1×20 стоят белая и черная шашки. Двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Как следует играть начинающему, чтобы выиграть?

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из нее можно получить ранее определенную проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из нее ведет к попаданию в ранее определенную выигрышную позицию.

3. Имеется куча из n спичек. Двое игроков по очереди берут от 1 до 10 спичек. Выигрывает взявший последнюю спичку. При каких n начинающий выигрывает вне зависимости от игры противника?

4. Хромой ферзь стоит на поле h7. Двое по очереди двигают его согласно шахматным правилам, но только либо влево, либо вниз, либо влево-вниз. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в нее.

5. При игре в двойные шахматы каждый игрок делает по два хода подряд. Проигрывает получивший мат либо тот, у кого съели короля. Докажите, что у черных нет выигрышной стратегии.

6. При игре в крестики-нолики на бесконечной доске двое по очереди ставят крестики и нолики. Выигрывает тот, кто первый поставит пять знаков подряд. Докажите, что у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

Графы

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними — линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро — это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

1. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) переставить коней так, чтобы в любой паре соседних углов стояли кони разного цвета?

2. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

3. Можно ли соединить 7 телефонов так, чтобы каждый из них был соединен ровно с тремя другими?

Обход графов. Вершину графа называют *четной*, если из нее выходит четное число ребер. Граф называют *четным*, если у него все вершины четные, *связным* — если между любыми вершинами существует путь, состоящий из ребер графа.

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу ребер графа:

- если в графе больше двух нечетных вершин, то правильный обход (т. е. последовательный путь по вершинам, соединенным ребрами, проходящий по каждому ребру ровно один раз) такого графа невозможен;
- для всякого четного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;
- если в связном графе ровно две нечетные вершины, то существует правильный обход, причем в одной из них он начинается, а в другой — кончается.

4. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 1985 авиалиний, из города Дальнего одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего.

5. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятерок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

Формула Эйлера. Граф называется *планарным*, если он может быть нарисован на плоскости так, что его ребра не пересекаются. Для планарного графа верна формула Эйлера $В + Г - Р = 2$, где В — число вершин графа, Р — число ребер, а Г — число граней, то есть областей плоскости (включая бесконечную), ограниченных ребрами графа.

6. Существует ли выпуклый многогранник, все грани которого — семиугольники?

Лемма Холла о паросочетаниях. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества так, что вершины каждого из этих множеств соединены ребрами только с вершинами другого множества. Лемма Холла утверждает, что если в двудольном графе для любого числа k любые k вершин из одной доли соединены по крайней мере с k вершинами другой доли, то вершины графа можно разбить на пары, соединенные ребрами.

7. 100 замов получили взыскания от 100 завов. При этом каждый зав наложил по одному взысканию на 15 замов, а каждый зам получил по одному взысканию от 15 завов. Докажите, что директор может снять часть взысканий так, что у каждого зама останется по одному взысканию, и все взыскания будут наложены разными завами.

8. Единичный квадрат K разбит на n частей равной площади двумя способами: $K=A_1\cup\ldots\cup A_n=B_1\cup\ldots\cup B_n$. Докажите, что можно вбить n гвоздей так, чтобы все A_i и все B_i были бы прибиты.

9. В клетчатом кубе $n\times n\times n$ в первых k слоях стоят nk ладей, не бьющих друг друга (ладья бьет вдоль трех направлений, параллельных осям координат). Докажите, что их можно дополнить до расстановки n^2 ладей во всем кубе, не бьющих друг друга.

Метод минимального контрпримера и спуск в графах. При решении многих задач используется так называемый метод минимального контрпримера (или правило крайнего; см. с. 13), который заключается в следующем. Предположим, что надо доказать, что некой «бяки» — объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, — не существует. Предположим противное. Тогда найдется (в некотором смысле) минимальная «бяка» — *минимальный контрпример*. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие. Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства. Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. При этом обычно ведется индукция сперва по числу вершин, потом по числу ребер.

10. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа — КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

11. Докажите, что каждую карту можно правильно (т. е. так, что граничащие страны окрашены в разные цвета) покрасить в пять цветов.

Теорема Рамсея. Пусть заданы два натуральных числа m и n. Теорема Рамсея утверждает, что найдется такое минимальное число $r(m, n)$, что в компании из $r(m, n)$ человек найдется либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых. Нахождение этой величины для конкретных m и n является сложной математической проблемой, не решенной даже для малых значений m и n.

12. Докажите, что среди пяти человек может не найтись ни трех попарно знакомых, ни трех попарно незнакомых.

13. Докажите, что среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

14. Докажите, что среди любых десяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

15. Докажите теорему Рамсея.

Алгебра и начала анализа

Симметрическая группа. Пусть у нас есть n различных элементов, поставленных в ряд. Мы можем переставить их, т. е. первый элемент пойдет на место с номером a_1, второй на место с номером a_2 и т. д. Если применить две перестановки подряд, то получится новая перестановка. Таким образом, перестановки можно перемножать. Оказывается, это умножение обладает свойством ассоциативности, более того, для каждой перестановки есть обратная, возвращающая элементы на место. В алгебре объекты с такими свойствами называются *группами*. Группа перестановок, или, по-другому, *симметрическая группа*, играет важную роль в математике.

Очевидно, любую перестановку можно получить, последовательно меняя местами пары элементов (такая перестановка называется *транспозицией*). Будем говорить, что перестановка *четная*, если она получается в результате произведения четного числа транспозиций, и *нечетная*, если она получается в результате произведения нечетного числа транспозиций. Оказывается, что такое определение корректно (т. е. перестановка не может быть одновременно четной и нечетно), а значит, верен следующий факт:

произведение двух четных перестановок четно, произведение двух нечетных перестановок четно, произведение четной и нечетной перестановок нечетно.

1. Дано n магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и одна пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот).

2. Можно ли в игре «в 15» получить такую расстановку, что 1 и 2 поменяны местами, а остальные числа стоят на своих местах?

3. Головоломка представляет собой два цикла из 8 шариков каждый, имеющих один общий шарик. Можно проворачивать каждый цикл. Можно ли добиться произвольного расположения шариков?

Последовательности. Последовательность — это функция, заданная на множестве натуральных чисел. Изучение последовательностей не только представляет собой ценность само по себе, но и служит инструментом для исследования функций.

4. Дана последовательность a_n. Известно, что при всех целых $m \neq n$ величина $a_n - a_m$ делится на $n - m$ и, кроме того, $a_n < P(n)$ при всех n для некоторого многочлена P. Докажите, что $a_n = Q(n)$ при всех n для некоторого многочлена Q.

Функциональные уравнения. Функциональные уравнения встречаются на олимпиадах высокого уровня. Требуется найти неизвестную функцию по уравнению на нее при некоторых переменных значениях аргумента. Особенную трудность представляют функциональные уравнения, где про функцию неизвестно, является ли она непрерывной. Основной подход к решению таких уравнений заключается в том, что, подставляя нетривиально зависящие переменные, удается найти значения функции вначале в нескольких «ключевых» точках (например, 0, 1), а затем и на всей числовой оси.

5. Уравнение $f(x + y) = f(x) + f(y)$ называется *уравнением Коши*. Решите уравнение Коши, если функция f: а) непрерывна; б) ограничена.

6. Решите функциональное уравнение $f(x+y)=f(x)f(y)$ в непрерывных функциях.

7*. Решите в непрерывных функциях функциональное уравнение $F(x+y)=H(x)+G(x)K(y)$.

Использование теоремы о промежуточном значении. Теорема о промежуточном значении утверждает, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке всякое значение, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

8. Докажите, что непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

9. На плоскости нарисован многоугольник M и прямая l. Докажите, что найдется прямая, параллельная l, делящая M на две равновеликие части.

10. Даны две фигуры на плоскости («хлеб» и «масло»). Докажите, что найдется прямолинейный разрез, делящий «хлеб» и «масло» пополам. (Аналогично в пространстве найдется плоскость, делящая пополам три тела — «хлеб», «масло» и «ветчину». Это утверждение представляет собой знаменитую *теорему о сэндвиче с ветчиной*.)

11. На отрезке $[0,1]$ задана непрерывная функция f такая, что $f(0)=f(1)$. Для каких положительных a обеспечено наличие горизонтальной хорды графика длины ровно a? (Ответ: $a=1/2k$, где k — натуральное.)

См. также задачу про возы (раздел «Фазовое пространство», задача 3).

Дискретная непрерывность. Для дискретных функций есть аналог теоремы о промежуточном значении. Если некоторая дискретная величина изменяется (увеличивается или уменьшается) только на 1, то при переходе от одного значения к другому эта величина принимает все промежуточные целые значения.

12. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.

13. На плоскости лежат 100 точек. Докажите, что существует прямая, по каждую сторону от которой лежит ровно 50 из этих точек.

Идея компактности. Комбинаторная компактность. Пространство, на котором некоторым образом определено понятие расстояния, называется *компактным*, если из любой последовательности точек этого пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т. е. последовательность, для которой найдется такая точка пространства, что для любого сколь угодно малого расстояния s расстояние от этой точки до любого члена последовательности будет меньше s). Свойство компактности помогает в решении разнообразных задач. Основные моменты — это ввести нужным образом понятие расстояния и доказать, что рассматриваемое с этим расстоянием пространство является компактным.

14. Докажите, что из любой последовательности чисел, лежащих между 0 и 1, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

15. Докажите, что из любой последовательности точек единичного а) квадрата; б) куба можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

16. Известно, что каждую конечную карту на плоскости можно правильно (т. е. так, что граничащие страны окрашены в разные цвета) раскрасить в 4 цвета. Докажите, что правильно раскрасить в 4 цвета можно любую карту.

17. В бесконечном парламенте у каждого парламентария не более 3 врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария будет не более одного врага в своей палате.

18. Известно, что человечество живет вечно, а число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная последовательность мужчин, в которой каждый является предком или потомком любого другого.

19. Докажите, что из любой бесконечной последовательности целых чисел можно выбрать подпоследовательность так, чтобы каждый ее член делился на предыдущий, или так, чтобы ни один член не делился ни на какой другой.

Применение к доказательству неравенств. Также полезным свойством компактных пространств является то, что любая непрерывная функция на компактном пространстве достигает своего минимума и максимума.

20. а) Покажите, что из последовательности 5-звенных ломаных в круге можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Покажите, что в единичном круге существует 5-звенная ломаная максимальной длины.

б) Покажите, что среди всех n-звенных ломаных, вписанных в многоугольник, найдется ломаная максимальной длины.

21. Пусть $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1, x + y + z = 1$. Докажите, что произведение xyz достигает максимума при $x = y = z$.

22. Пусть $m > n$. Докажите неравенство

$$\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m}{k}\right)^{1/m} \geqslant \left(\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n}{k}\right)^{1/n}.$$

23. (Компактность в функциональных пространствах.) Пусть $F(X)$ — возрастающая функция, определенная на отрезке $[0; 1]$. Известно, что область ее значений принадлежит отрезку $[0; 1]$. Докажите, что, каково бы ни было натуральное n, график функции можно покрыть n прямоугольниками, стороны которых параллельны осям координат и площадь каждого из которых равна $1/n^2$. Считайте функцию $F(X)$ непрерывной, изменяющейся от 0 до 1.

Контрпримеры в некомпактной ситуации. В случае, если пространство не компактно, то не из всякой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. В результате возникают контрпримеры. Поэтому важно проверять компактность пространства.

24. Функция $F(x)$ задана и непрерывна при $0 \leqslant x < \infty$. Известно, что при любом фиксированном x последовательность $F(x + N) \to 0$ при $N \to \infty$, $N \in \mathbb{N}$. Следует ли отсюда, что $F(x) \to 0$ при $x \to \infty$?

25. Функция f задана на положительной полуоси и непрерывна. Известно, что для каждого положительного x последовательность $f(n \cdot x)$ сходится. Верно ли, что существует предел функции $f(x)$ на бесконечности?

Принцип сжимающих отображений. Отображение f метрического (с введенным на нем расстоянием) пространства в себя называется *сжимающим*, если найдется такое положительное число $\lambda < 1$, что для любых точек x, y расстояние между $f(x)$ и $f(y)$ не больше расстояния от x до y, умноженного на λ.

Принцип сжимающих отображений утверждает, что если пространство полное (т. е. всякая фундаментальная последовательность сходится в нем), то сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.

26. Две карты Москвы, одна с более мелким масштабом, наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

Преобразование алгебраических выражений. Умение работать с алгебраическими выражениями — одно из базовых математических умений. Оно позволяет быстрее решать задачи, прорабатывать большее количество подходов. Умение быстро и правильно считать — это навык, которого очень сильно недостает школьникам, специализирующимся на олимпиадах, из-за его отсутствия часто возникают нелепые и обидные ошибки, приводящие к печальным результатам.

Основные формулы, использующиеся при преобразовании алгебраических выражений:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1});$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+\ldots-ab^{2k-1}+b^{2k});$$
$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+b^n.$$

27. Решите уравнение в целых числах: $2^n-3^m=5$.

28. Пусть $S=2009\cdot 2+1+2010\cdot 2+1+\ldots+3009\cdot 2+1$. Найдите такие целые x, y, что $x^2-y^2=S$.

Тригонометрия. При работе с тригонометрическими выражениями часто используются формулы:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}^2 x+1.$$

Преобразование тригонометрических выражений — тема, которую можно разбирать бесконечно. Поэтому мы ограничимся небольшим количеством задач. В то же время эти задачи позволяют хорошо оценить уровень подготовки.

29. Найдите $\sum\limits_{n=1}^{k} \cos nx$.

30. Найдите $\sum\limits_{n=1}^{k} \sin nx$.

Теория чисел

Делимость и остатки. Допустим, нас интересуют остатки от деления чисел на 10 (последняя цифра). Как найти последнюю цифру произведения двух чисел? Достаточно перемножить последние цифры сомножителей и взять последнюю цифру результата. Аналогичная теорема верна для любого делителя: остаток произведения или суммы двух чисел определяется остатками этих чисел — это создает «арифметику остатков».

Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

1. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, во второй — 49 камней, в третьей — 5 камней. Разрешается объединять 2 кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые не представимы в виде суммы двух квадратов.

3. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

4. Решите в целых числах: а) $x^2-4y=3$, б) $x^2-3y^2=8$.

5. На сколько нулей оканчивается число $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100$?

6. Ни одно из двадцати данных чисел не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

7. Докажите, что число N^3-N делится на 3 при любом натуральном N.

8. Верно ли, что для любого n число n^2+n+41 простое?

Четность. Простейшим и наиболее распространенным примером использования отстатков является применение свойств четности и нечетности. Четные числа — это те, которые делятся на 2 без остатка (например, 2, 4, 6 и т. п.). Каждое такое число можно записать в виде $2k$, подобрав подходящее целое k. Нечетные числа — это те, которые при делении на 2 дают в остатке 1. Каждое такое число можно записать в виде $2k+1$, подобрав подходящее целое k (например, $3=2\cdot 1+1$, $5=2\cdot 2+1$).

Четные и нечетные числа обладают часто используемыми свойствами: а) сумма двух четных чисел четна; б) сумма двух нечетных чисел четна; в) сумма четного числа и нечетного числа — нечетное число.

9. Требуется разложить несколько арбузов в несколько корзин, расставленных по кругу, так, чтобы в любых двух соседних коринах число арбузов отличалось на единицу. Можно ли это сделать, если корзин: а) 3; б) 4; в) 98; г) 99?

10. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

11. Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n?

12. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

НОД, НОК. Понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного играют важную роль в теории чисел и алгебре. Умение быстро находить эти величины и оперировать ими существенно упрощает и ускоряет вычисления, позволяет замечать нетривиальные факты и использовать дополнительные соображения.

13. Докажите, что $\text{НОК}(1, \ldots, n) > n^{100}$ при всех достаточно больших n.

14. Если дробь a/b несократима, то и дробь $(a+b)/ab$ тоже несократима.

Алгоритм Евклида. Алгоритм Евклида помогает находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах.

Это процесс построения «остатков от остатков». Если даны два натуральных числа $n_1 > n_2$ и операции сложения и вычитания, то можно получить число $n_3 < n_2$ — остаток от деления n_1 на n_2, затем $n_4 < n_3$ — остаток от деления n_2 на n_3 и т. д. Этот процесс завершится на некотором шаге, когда n_{k-1} будет делиться на n_k. Число n_k будет равно наибольшему общему делителю чисел n_1 и n_2.

Отметим, что этот алгоритм может оперировать не только с натуральными числами, но и с многочленами, комплексными числами и т. д. Иногда исходным числам и остатку соответствуют некоторые объекты.

15. Разделите дугу окружности величиной 19° на 19 равных частей с помощью одного циркуля.

16. Докажите, что числа $2^m - 1$ и $2^n - 1$ взаимно простые тогда и только тогда, когда числа n и m взаимно простые.

17. ОАО «Не обманешь — не продашь» каждые 11 месяцев объявляет собранию акционеров, что доход превышает расход, а каждые 12 месяцев налоговым органам — что расход превышает доход. Как долго ОАО сможет не врать при таких заявлениях?

18. От прямоугольника отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Одна из сторон изначального прямоугольника равна 1, другая — α. Периодична ли последовательность отношений сторон получившихся прямоугольников (меньшей к большей), если величина α равна: а) $\sqrt{2}$; б) $(\sqrt{5}+1)/2$; в) $\sqrt[3]{2}$; г*) $\sqrt{2009}$?

Китайская теорема об остатках. Пусть даны n попарно взаимно простых натуральных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и n целых чисел $r_1, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i < d_i$ для любого i. Тогда найдется такое целое неотрицательное число A, меньшее $d_1 d_2 \ldots d_n$, что остаток от деления A на d_i равен r_i для любого i. Более того, любое число B, обладающее таким свойством равно A по модулю $d_1 d_2 \ldots d_n$.

19. Могут ли два соседних числа иметь более 1000 различных делителей каждое?

20. Докажите, что найдется последовательность из подряд идущих 2009 чисел такая, что первое число делится на 2, второе — на 3, третье — на 5, …, 2009-е — на 2009-е по номеру простое число.

Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Малая теорема Ферма утверждает, что если число a не делится на простое число p, то $a^{p-1}-1$ делится на p. Обобщением малой теоремы Ферма является теорема Эйлера. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним (функция φ называется *функцией Эйлера*). Тогда если a и n взаимно просты, то $a^{\varphi(n)}-1$ делится на n. Очевидно, для простого числа p выполняется $\varphi(p)= = p-1$.

Эти уравнения существенно помогают находить остатки от сложных выражений, а также решать полиномиальные уравнения по модулю простого числа.

21. Докажите, что если p и q — различные простые числа, то $p^q+q^p \equiv p+q \pmod{pq}$.

22. Докажите, что число $30^{239}+239^{30}$ составное.

23. Докажите, что число $111\ldots1$ (2002 единицы) делится на 2003.

24. Простое число p делит x^2+1. Докажите, что p имеет вид $4k+1$.

25. Простое число p делит x^2+x+1. Докажите, что p имеет вид $3k+1$.

26. Докажите, что если $p-1$ делится на d, то сравнение $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно d решений.

27. Докажите, что если $d|(2^{2^n}+1)$, то $2^{n+1}|(d-1)$.

Сумма цифр. Признаки делимости. Основные признаки делимости следующие:

- Если последняя цифра числа четная, то число делится на 2.
- Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.
- Если число, образованное двумя последними цифрами числа, делится на 4, то и исходное число делится на 4.
- Если число оканчивается на 5 или 0, то оно делится на 5.
- Если число, образованное тремя последними цифрами числа, делится на 8, то и исходное число делится на 8.
- Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.
- Если знакопеременная сумма цифр (т. е. первая цифра идет со знаком «+», вторая со знаком «—» и т. д.) числа делится на 11, то и само число делится на 11.

Помимо собственно проверки делимости эти признаки являются источниками различных инвариантов (например, делимость суммы цифр на 3 и 9).

28. На доске написано: 645*7235. Замените звездочку цифрой так, чтобы получившееся число делилось на 9.

29. Найдите все числа, ровно в 12 раз большие суммы своих цифр.

30. Ученик 6 класса Петя Иванов придумал две новые теоремы:

а) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27;

б) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Сможет ли Петя доказать эти теоремы?

31. Подряд выписали 3000 двоек. Делится ли получившееся число а) на 3, б) на 9, в) на 11?

32. У числа последнюю цифру переставили в начало. Оно утроилось. Докажите, что получившееся число делится на 27.

33. Замените * цифрами в выражении 5** так, чтобы полученное число делилось на 11.

34. Делится ли число 2001200220032004200520062007200820 09 на 9?

Периоды дробей. Всякое рациональное число p/q представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби

$$\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1},\overline{b_1 b_2\ldots b_n}(\overline{c_1 c_2\ldots c_l}) =$$
$$= \overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1},\overline{b_1 b_2\ldots b_n} + \overline{c_1 c_2\ldots c_l}\cdot 10^{-n-l}\cdot(1+10^{-l}+10^{-2l}+\ldots).$$

Число $\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1},\overline{b_1 b_2\ldots b_n}$ называется *предпериодом*, число $\overline{c_1 c_2\ldots c_l}$ называется *периодом*, а число l называется *длиной* периода.

35. Докажите, что минимальный период дроби $1/p$, где p — простое число, делит $p-1$.

36. Найдите длину периода дроби $1/3^{1000}$.

37. а) Число x оканчивается на 2. После того, как его последнюю цифру переставили в начало, оно удвоилось. Найдите все такие x.

б) Последнюю цифру числа x переставили в начало. Оно удвоилось. Докажите, что x есть циклический сдвиг периода дроби $2/19$.

Системы счисления. Для любого натурального числа n, большего единицы, любое число A можно записать в *n-ичной* системе счисления:

$$A=\overline{a_l a_{l-1}\ldots a_0}=\sum_{i=0}^{l} a_i n^i.$$

Исторически сложилось, что мы используем десятичную систему счисления. Однако в ряде случаев удобнее переходить к другим основаниям. Например, в n-ичной системе счисления очевидно формулируется признак делимости на число n — для этого достаточно, чтобы число оканчивалось нулем.

39. Докажите, что в последовательности $[2^n\sqrt{2}]$ имеется бесконечное множество четных чисел.

40. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Если $S(n)=1000$, то каково максимально возможное значение $S(n^2)$?

41. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Если $S(n^2)\leqslant 1000$, то каково максимально возможное значение $S(n)$?

42. Найдите 100-ю цифру после запятой числа $\sqrt{0{,}999\ldots9}$ (99 девяток).

Лемма Гензеля. Рассмотрим множество остатков по модулю p^n, взаимно простых с p. *Первообразным корнем* называется такой элемент, что остальные взаимно простые с p получаются из него возведением в степень. Тогда если x — первообразный корень по модулю p^k, $k>1$, $p>2$, то среди остатков вида $x+np^k$ все, кроме ровно одного, являются первообразными корнями по модулю p^{k+1}.

43. При каких n число 2^n-1 делится на 5^{100}?

44. При каких n число 7^n-1 делится на 2^{100}?

45. Докажите, что если x — первообразный корень по модулю p^3, где p — нечетное простое, то x — первообразный корень по модулю p^n для любого n. Верно ли это утверждение при $p=2$?

46. Найдите такие n, чтобы среди последних 1000 цифр числа 2^n нашлось 100 подряд идущих а) нулей; б) девяток.

47. Докажите, что при бесконечно многих n число 2^n оканчивается на n.

Основная теорема арифметики. Основная теорема арифметики утверждает, что любое натуральное число N единственным способом представляется в виде произведения $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_l^{k_l}$, где p_i — различные простые числа, а k_i — натуральные числа, обозначающие кратность вхождения в число N. Разложение числа на множители позволяет быстрее умножать и делить числа, вычислять НОД и НОК. Аналоги основной теоремы арифметики имеют место и для других алгебраических объектов, например, многочленов.

48. Существует ли 2009 нецелых рациональных чисел таких, что произведение любых двух — целое?

49. Существует ли 2009 целых чисел, ни одно из которых не делится на другое, но произведение любых двух из них делится на все остальные?

50. Найдите число нулей в конце числа 2009!.

51. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n ни при каком натуральном n.

52. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его. Докажите, что четное число n является совершенным тогда и только тогда, когда $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ простые.

Диофантовы уравнения. Так называются уравнения, которые требуется решить в целых числах. Для некоторых случаев методы решений таких уравнений давно известны, например для линейных диофантовых уравнений, с другой стороны, иногда их решение весьма затруднительно, например для уравнения $x^n + y^n = z^n$. Рассмотрим некоторые возможные подходы.

Метод спуска. Метод спуска заключается в том, чтобы последовательной заменой переменных (например, используя разложение многочленов на множители, основную теорему арифметики и свойства НОД) добиться того, чтобы уравнение упростилось, а кроме того, на участвующие в нем переменные были бы наложены дополнительные условия (например, переменные взаимно просты). При таком методе часто полезно бывает разбивать решение на случаи, например, четного и нечетного значения некоторой переменной.

Решите в целых числах уравнения:

53. $3\cdot 2^x+1=y^2$.
54. $x^2+y^2+z^2=2xyz$.
55. $x^2+y^2=z^2$.
56. $x^4+y^4=z^2$.

Добавление иррациональностей с последующим разложением. Суть метода в том, чтобы пополнить целые числа каким-нибудь элементом так, чтобы в полученном кольце осталась верна основная теорема арифметики, но при этом какие-то ранее неприводимые многочлены разложились бы на множители. Например, неприводимый многочлен x^2+1 представляется в виде $(x+i)(x-i)$, если добавить к целым числам корень из -1. При этом способе решения полезно использовать идею сопряжения.

Решите уравнения в целых числах:

57. $x^2+4=y^3$.
58. $x^2+4=y^3$.
59. $x^2+2=y^n$.
60. $x^3+y^3=z^3$.

Иррациональные числа. Число называется *иррациональным*, если оно не представляется в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. Доказательство иррациональности чисел — хорошее упражнение на применение метода от противного.

61. Докажите, что число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

62. Докажите, что число $\log_{10} 2$ иррационально.

63. Докажите, что градусная мера угла α такого, что $\cos\alpha=1/3$, иррациональна.

64. Докажите, что число $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ иррационально.

65. Докажите, что существует бесконечно много чисел m и n таких, что

$$\left|\sqrt{2}-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

66. Может ли быть минимальным значением многочлена с рациональными коэффициентами а) $-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$?

Неравенства

Неравенства — распространенная тема олимпиадных задач, требующая от школьника большой математической культуры. Чтобы успешно справляться с задачами на неравенство, необходимо уметь быстро преобразовывать алгебраические выражения, владеть методами математического анализа, знать большое количество ключевых неравенств и применять их. Мы разберем основные методы.

Шевеления, дифференцирования, множители Лагранжа. Дифференцирования по переменным позволяют найти наибольшее или наименьшее значение выражений, стоящих в неравенстве. Также можно зафиксировать часть переменных и посмотреть, как изменяется значение выражения при «шевелении» других переменных. Например, таким способом часто бывает удобно доказывать, что худшим является случай, когда переменные равны или, напротив, разность между ними максимальна.

1. Сумма неотрицательных чисел x, y, z равна единице. Найдите максимум выражения $x^2y+y^2z+z^2x$.

2. Числа x_i, $i=1, \ldots, n$, лежат на отрезке $[-1, 1]$, а сумма их кубов равна нулю. Докажите, что $\sum x_i \leqslant n/3$.

Использование свойств выпуклости. Функция f называется *выпуклой* (вверх), если для любых x, y и $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, таких, что $\lambda+\mu=1$, выполнено

$$f(\lambda x+\mu y)\geqslant \lambda f(x)+\mu f(y).$$

В частности, если сумма $x+y$ фиксирована, то выражение $f(x)+$ $+f(y)$ будет достигать своего максимума при $x=y$. Более того при условии фиксированной суммы, если переменных много, то, зафиксировав все, кроме двух, мы получим, что максимум достигается при их равенстве, а значит максимум всего выражения достигается при равенстве всех переменных. Подобные идеи бывают полезны для доказательства неравенств.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Докажите, что

$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n})^n.$$

4. Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

Использование типичных неравенств. Для успешного решения задач на неравенства необходимо знать большое количество типичных неравенств и уметь применять их при доказательстве. Мы приведем основные неравенства.

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца:.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2.$$

5. Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{y_1+\ldots+y_n}$$

для положительных x_i, y_i.

6. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}$$

для положительных a, b, c, d.

7. Многочлен $P(x)$ имеет неотрицательные коэффициенты. Докажите неравенство: $P(xy)^2 \leqslant P(x)^2 P(y)^2$.

Неравенство Коши. Для положительных a_i

$$\frac{\sum a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}.$$

8. (Локальное неравенство.) Докажите, что для натуральных чисел $n \geqslant m$ выполнено неравенство

$$\frac{a^n}{b^m} \geqslant \frac{na^{n-m} - mb^{m-n}}{n-m}.$$

9. Докажите, что последовательность $(1+1/n)^n$ возрастает.

Неравенство Гёльдера. Если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то для положительных x_i, y_i

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n \leqslant (x_1^p+\ldots x_n^p)^{1/p}(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{1/q}.$$

10. Для положительных чисел $a, b, c \geqslant 0$ докажите неравенство:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

11. Пусть $x, y, z \geqslant 0$ и $x+y+z=1$. Найдите минимум следующего выражения: $x^7+2y^7+3z^7$.

Транснеравенство. Если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, σ — произвольная перестановка, то

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \geqslant x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)} \geqslant \\ \geqslant x_1y_n+x_2y_{n-1}+\ldots+x_ny_1.$$

12. Докажите неравенство

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c \geqslant 6abc$$

для положительных a, b, c.

13. Докажите неравенство

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3b+b^3c+c^3a$$

для положительных a, b, c.

Приведение к сумме квадратов. Очевидно, что любой квадрат действительного числа не меньше нуля. Тем не менее это элементарное соображение позволяет доказывать многие неравенства путем выделения квадрата или суммы квадратов.

14. Докажите *неравенство Коши—Буняковского*:

$$\sum x_i^2 \sum y_i^2 \geqslant \left(\sum x_iy_i\right)^2.$$

15. Докажите, что при положительных x, y, z выполняется неравенство $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$.

16. Докажите неравенство: $1/8+a^2/2+b^4/2 \geqslant ab$.

Комбинаторика счета

Правило произведения. Если нужно выбрать пару объектов, первый из которых можно выбрать m способами, а второй, независимо от первого, n способами, то число способов выбрать пару равно mn. Это правило обобщается на любое количество независимо выбираемых объектов.

1. На табло горит n лампочек и расположено n кнопок. Каждая лампочка соединена со своей кнопкой, нажатие которой меняет состояние лампочки на противоположное (а каждая кнопка соединена со своей лампочкой). Докажите, что число узоров, которые можно получить, нажимая на кнопки, равно 2^n.

2. Имеется n урн. В i-й урне находятся k_i попарно различных бюллетеней. Сколькими способами можно выбрать по одному бюллетеню из каждой урны?

Подсчет с повторениями. Часто используются формулы для числа сочетаний из n элементов k, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, и числа размещений из n элементов по k, $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$. В англоязычной литературе (а теперь и во многих русскоязычных источниках) вместо C_n^k пишут $\binom{n}{k}$.

В комбинаторике счета часто сперва считают общее число вариантов, а затем некоторые варианты отождествляются. При этом ситуацию (перебором) сводят к случаю, когда в каждом классе отождествляется по одинаковому количеству вариантов. В этом случае число классов равно общему числу вариантов, деленному на число вариантов в классе («размер орбиты»).

3. Пусть p — простое число. В ожерелье p бусинок k различных цветов. Ожерелья, отличающиеся поворотом, не различимы. Докажите, что число различных ожерелий равно $\frac{k^p-k}{p}+k$.[1] Чему равно число различных ожерелий, если ожерелья можно переворачивать?

4. Сколькими способами можно раскрасить куб в 6 цветов? Два способа *одинаковы*, если они различаются поворотом.

[1] Выведите отсюда малую теорему Ферма: если $k \not\equiv 0 \mod p$, то $k \equiv 1 \mod p$.

Биномиальные коэффициенты. Пусть требуется выбрать k объектов из n. Тогда количество возможных способов сделать это обозначается C_n^k. Нетрудно показать, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Биномиальные коэффициенты участвуют в формуле бинома Ньютона, обладают многими полезными комбинаторными свойствами. В доказательстве свойств биномиальных коэффициентов соображения «здравого смысла», исходящие из их определения, зачастую играют большую роль, чем алгебраические соображения, опирающиеся только на формулу.

5. Пусть p — простое число, $k \geqslant 1$. Число n делится на p^k, число m не делится на p^k. Докажите, что тогда C_n^m делится на p.

6. Найдите суммы: а) $\sum\limits_k C_n^k$; б) $\sum\limits_k C_n^{2k}$; в) $\sum\limits_k (-1)^k C_n^{2k}$.

7. Найдите 1001^6.

Делимость биномиальных коэффициентов. Помимо комбинаторных свойств биномиальные коэффициенты обладают многими интересными свойствами с точки зрения терии чисел.

8. Сколько четных коэффициентов в первых 8 строках треугольника Паскаля?

9. Пусть p простое и $n < p < 2n$. Докажите, что тогда C_{2n}^n делится на p.

Многочлены

Мультипликативная запись и теорема Виета. При решении задач на многочлены полезна *мультипликативная форма записи*:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

При этом x_i суть *корни* многочлена P. *Теорема Виета* утверждает, что корни многочлена и его коэффициенты связаны следующими соотношениями:

$$\frac{a_k}{a_0} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (-1)^k x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

Мультипликативную запись приводят к следующему виду:

$$P(x) = a_0(x - x_{j_1})^{k_1} \ldots (x - x_{j_l})^{k_l};$$

здесь все x_{j_α} различны, а k_α суть *кратности* корней. При этом многочлен P делит многочлен Q, если корни P являются корнями Q и кратности корней P не больше соответствующих кратностей корней Q.

Аналогичные соображения проходят и для многочленов от нескольких переменных: P делит Q, если нули P являются нулями Q (с учетом кратностей).

1. Найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами такой, что число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$ является его корнем.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0$. Число M_k есть *k-е среднее*:

$$M_k = \sqrt[k]{\frac{\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} x_{i_1}\ldots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}}.$$

Докажите *неравенство Маклорена*: $M_1 \geqslant M_2 \geqslant \ldots \geqslant M_k$. Любое равенство может достигаться, только если все числа равны.

3. Пусть многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ имеет рациональный корень x_1. Докажите, что знаменатель x_1 делит коэффициент при старшем члене $P(x)$.

4. Пусть $k_1+k_2=n$. Докажите, что многочлен

$$(x-1)(x^2-1)\ldots(x^n-1)$$

делится на произведение

$$(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{k_1}-1)(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{k_2}-1).$$

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

Квадратный трехчлен. Самый простой после линейного двучлена многочлен — это квадратный трехчлен. Его свойства, формула нахождения корней подробно изучаются на школьных занятиях. Тем не менее, зачастую на младших позициях олимпиад разного уровня встречаются задачи про квадратные трехчлены.

6. Дано два квадратных трехчлена. Может ли каждый из них иметь корни, а их сумма — нет?

7. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней. При этом $a+b+c>0$. Какой знак имеет коэффициент c?

Кубический многочлен. Следующие по сложности многочлены — кубические — практически не изучаются даже в специализированных школах. Поэтому задания про них ставят в тупик даже хорошо подготовленных школьников.

8. Докажите, что график кубического многочлена имеет центр симметрии.

9. Пусть $x_1>x_2>x_3$; $x'_1>x'_2>x'_3$; $x_1>x'_1$. Кроме того, $x_1+x_2+x_3=x'_1+x'_2+x'_3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x'_1x'_2+x'_2x'_3+x'_3x'_1$. Докажите, что $x_3>x'_3$.

Многочлены от нескольких переменных. По своей сути многочлены от многих переменных не сильно отличаются от многочленов от одной переменной. Тем не менее, многие «интуитивно понятные» утверждения про многочлены, которые верны в случае одной переменной, не верны, если переменных больше. Задачи на многочлены от нескольких переменных непривычны для школьников и поэтому сложны.

10. а) Дан многочлен от одной переменной $P(x)$. Известно, что $\inf P(x)=0$. Верно ли, что $P(x)=0$ при некотором x?

б) Дан многочлен от двух переменных $P(x, y)$. Известно, что $\inf P(x, y)=0$. Верно ли, что $P(x, y)=0$ при некоторых x, y?

11. Разложите на множители а) $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$; б) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Критерий Эйзенштейна. Многочлен называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена P таков: Если старший коэффициент P не делится на простое число p, все остальные коэффициенты P делятся на p, а младший коэффициент не делится на p^2, то многочлен P не разлагается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами (отличных от константы).

12. Докажите критерий Эйзенштейна.

13. Докажите *лемму Гаусса*: если многочлен P не разлагается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами (отличных от константы), то многочлен P не разлагается в произведение двух многочленов с рациональными коэффициентами (отличных от константы).

14. Докажите неприводимость *кругового многочлена*

$$\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1.$$

СОВЕТУЕМ ПОЧИТАТЬ

Книги для младших школьников

1. Е. Я. Гик. Математика на шахматной доске. — М.: Наука, 1976.
2. В. Н. Дубровский, А. Т. Калинин. Математические головоломки. — М.: Знание, 1990.
3. Л. Кэрролл. История с узелками. — М.: Мир, 2000.
4. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. Лучшие задачи на смекалку. — М.: Дрофа, 2006.
5. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. Старинные занимательные задачи. — М.: Дрофа, 2006.
6. Я. И. Перельман. Занимательная алгебра. — М.: Наука, 1974.
7. А. П. Савин. Математические миниатюры. — М.: 1991.
8. А. В. Спивак. Математический праздник. — М.: Бюро Квантум, 2004.
9. И. В. Ященко. Приглашение на математический праздник. — М.: МЦНМО, 2009.
10. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1989.

Книги для начинающих

11. В. В. Произволов. Задачи на вырост. — М.: МИРОС, 1995.
12. И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат. — М.: МЦНМО, 2009.
13. Г. Штейнгауз. Задачи и размышления. — М.: Мир, 1974.
14. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп. — Наука, 1981.
15. У. Болл, Г. Кокстер. Математические эссе и развлечения. — М.: Мир, 1986.
16. Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах. — М.: МЦНМО, 2013.

Олимпиадные учебники

17. Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2009.
18. В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2011.

19. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009.
20. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2014.
21. В. А. Уфнаровский. Математический аквариум. — М.: МЦНМО, 2014.
22. С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.
23. В. В. Ткачук. Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2011. (Эта книга очень хороша для того, чтобы натренировать продвинутого олимпиадника по части вычислительной культуры.)
24. Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. — М.: МЦНМО, 2012.
25. Задачи по математике / Под ред. А. Шеня. — М.: МЦНМО, 2000. (www.mccme.ru/free-books/57/shen.pdf)
26. С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков. Арифметика, алгоритмы, сложность вычислений. — М.: Дрофа, 2005.
27. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, Н. Б. Васильев. Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года для 8—11 классов. — М.: TREADE Publishers, 1994.
28. Московские математические олимпиады. 60 лет спустя / Под ред. Ю. С. Ильяшенко, В. М. Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 1995. (Приложение к журналу «Квант» № 6/95.)
29. С. А. Дориченко, И. В. Ященко. LVIII московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач. — М.: ТЕИС, 1994.
30. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1987.
31. Л. Э. Медников, А. С. Мерзляков. Математические олимпиады. — Ижевск: РХД, 2000.
32. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 1: Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1976.
33. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2: Геометрия (планиметрия). — М.: Наука, 1967.

34. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 3: Стереометрия. — М.: Физматлит, 2000.
35. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.
36. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.
37. А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: Наука, 1954.
38. М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. Геометрия масс. — М.: Наука, 1987.
39. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2007.
40. В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

Книги, посвященные общим методам решения задач

41. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1975.
42. Д. Пойа. Математическое открытие. — М.: Наука, 1976.
43. Д. Пойа. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1961.
44. Г. Радемахер, О. Тёплиц. Числа и фигуры: Опыты математического мышления. — Ижевск: РХД, 2000.

Учебники по темам, примыкающим к олимпиадам

45. И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом. Тригонометрия. — М.: МЦНМО, 2014.
46. Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. Комбинаторика. — М.: МЦНМО, 2013.
47. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
48. Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978.
49. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981.
50. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. — М.: МЦНМО, 2010.
51. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1992.
52. И. М. Гельфанд, А. Шень. Алгебра. — М.: МЦНМО, 2014.

53. А. А. Кириллов. Пределы. — М.: Фазис, 1995.
54. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.
55. С. Л. Табачников. Многочлены. — М.: Фазис, 1996.
56. В. А. Зорич. Математический анализ. Ч. I, II. — М.: МЦНМО, 2012.
57. Б. П. Гейдман. Площади многоугольников. — М.: МЦНМО, 2013.
58. Э. Б. Винберг. Симметрия многочленов. — М.: МЦНМО, 2001.
59. В. О. Бугаенко. Уравнения Пелля. — М.: МЦНМО, 2010.

Разное

Кроме основного блюда полезен «гарнир», в который можно заглядывать время от времени.

60. Энциклопедия элементарной математики: В 5 т. — М.: Наука, 1951—1966.
61. М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1999.
62. М. Гарднер. Математические досуги. — М.: Мир, 2000.
63. М. Гарднер. Математические новеллы. — М.: Мир, 2000.
64. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982.
65. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
66. Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский. Математические беседы. — М.: Физматлит, 2004.
67. Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М.: Наука, 1987.
68. Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1985.
69. О. Оре. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.
70. В. В. Прасолов. Рассказы о числах, многочленах и фигурах. — М.: Фазис, 1997.
71. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1965. (Вообще из «Фейнмановских лекций по физике» советуем прочитать страницы, посвященные математике. Там содержится лучшее изложение школьной математики, например, том 1, глава «Алгебра».)

72. В. В. Прасолов. Точки Брокара и изогональное сопряжение. — М.: МЦНМО, 2012.
73. Н. П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников. — М.: МЦНМО, 2012.
74. В. В. Острик, М. А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. — М.: МЦНМО, 2011.
75. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.

Сборники олимпиадных задач

76. Турнир городов: мир математики в задачах / Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов. — М.: МЦНМО, 2012.
77. Тысяча задач Международного математического Турнира городов / А. К. Толпыго. — М.: МЦНМО, 2010.
78. Московские математические олимпиады 1993—2005 г. / Р. М. Федоров и др. — М.: МЦНМО, 2008.
79. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993—2009 / Н. Х. Агаханов и др. — М.: МЦНМО, 2014.
80. Математика. Областные олимпиады. 8—11 кл. / Н. Х. Агаханов и др. — М.: Просвещение, 2010.
81. Математические олимпиады школьников. 9 класс / Н. Х. Агаханов и др. — М.: Просвещение, 1997.
82. Математические олимпиады школьников. 10 класс / Л. П. Купцов и др. — М.: Просвещение, 1998.
83. Математические олимпиады школьников. 11 класс / Л. П. Купцов и др. — М.: Просвещение, 1999.
84. Республиканские математические олимпиады / Б. Д. Белоусов и др. — Кишинев: Штиинца, 1986.
85. Петербургские математические олимпиады / С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К. П. Кохась. — СПб: Лань, 1998.
86. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике / В. О. Бугаенко. — М.: МЦНМО: ЧеРо. 1998.
87. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский и др. — Киев: Вища школа, 1984.
88. Венгерские математические олимпиады / Й. Кюршак и др. — М.: Мир, 1976.
89. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. — М.: Просвещение, 1986.

90. Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.
91. Избранные задачи (из журнала «American Mathematical Monthly»). — М.: Мир, 1977.
92. Сборник задач московских математических олимпиад / А. А. Леман. — М.: Просвещение, 1965.
93. Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. — М.: Дрофа, 1998.
94. Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. — М.: Просвещение, 1976.
95. Математические соревнования в Ленинграде—Санкт-Петербурге / С. Е. Рукшин. — Ростов-на-Дону: МарТ, 2000.
96. Польские математические олимпиады / С. Сташевич, Е. Бровкин. — М.: Мир, 1978.
97. Физико-математические олимпиады / А. П. Савин и др. — М.: Знание, 1977.
98. Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. — СПб.: Политехника, 1994.
99. Всероссийские математические олимпиады школьников / Г. Н. Яковлев и др. — М.: Просвещение, 1992.

Приложения к журналу «Квант»

100. Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. Ч. 1. — М.: Бюро Квантум, 2010; Ч. 2. — М.: МЦНМО, 2011;
101. Н. Б. Васильев. Избранные статьи. Приложение к журналу «Квант», № 6/1998.
102. Математический кружок. Выпуск 3. Приложение к журналу «Квант», № 3/1999.
103. Математический кружок. Выпуск 4. Приложение к журналу «Квант», № 5/1999.

Книги, помогающие сориентироваться

104. В. И. Арнольд. Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). — М.: МЦНМО, 2011.

105. В. И. Арнольд. Задачи для детей от 5 до 15 лет. — М.: МЦНМО, 2013.
106. А. Н. Колмогоров. Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. — (Сер. «Библиотечка „Квант“», вып. 64).
107. Н. Винер. Я — математик. — Ижевск: РХД, 2001.
108. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. — М.: МЦНМО, 2010.
109. А. Доксиадис. Дядя Петрос и проблема Гольдбаха. — М.: АСТ, 2002.
110. А. Гротендик. Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика. — Ижевск: РХД, 2001.
111. Л. С. Понтрягин. Жизнеописание Л. С. Понтрягина, математика, составленное им самим. — М.: Изд. «Прима В», 1998.

Совет по интернет-форумам: Art of problem solving, mathlinks.ro, dxdy.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ