Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М.,
Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ІІ етапу
Всеукраїнської олімпіади
з математики – 2010

Випуск 8

навчальний посібник

умови
відповіді
розв'язання

Слов'янськ – 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М.,

Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2010

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою

Слов'янського державного педагогічного університету

в якості навчального посібника

для проведення факультативних занять з математики

Слов'янськ – 2011

Серія заснована у 2008 році

УДК 371.384:51 (076)
ББК 22.1
О – 543

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 (ВИПУСК 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...): Навчальний посібник – Слов'янськ, 2011. – 80 с.

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗів.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою Слов'янського державного педагогічного університету – протокол

№ __ від __.__.2011 р.;

Рецензенти: кандидат фіз.-мат. наук ЖУЧОК Ю.В., Інститут інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри

кандидат фіз.-мат. наук ВЕЛИЧКО В.Є., Слов'янський державний педагогічний університет, доцент кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри ГМВМ Кадубовський О.А.

ВІД АВТОРІВ

„Математика – це мистецтво розв'язувати задачі, які розв'язувати не вмієш"

„Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!"
Д. Пойа[1].

Даний посібник є **восьмим** випуском серії **„ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ..."** заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 27 листопада 2010 року відповідно до наказу УОН № 552 від 04.10.2010.

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомить в наведеній літературі, зокрема в [13][2].

[1] **Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.**
[2] **Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.**

Від авторів

В посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає: у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету СДПУ висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів. Автори посібника висловлюють щиру подяку викладачам кафедри геометрії та методики викладання математики Плесканьовій Лілії Григорівні та Бірюковій Галині Миколаївні за активну участь у підготовці посібника.

Автори мають надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням і стане для багатьох з них поштовхом до більш глибокого вивчення математики в цілому.

Вчіться творити та винаходити в процесі розв'язування задач!
З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного університету.

25.01.2011

ЗМІСТ

УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Ціна товару становила 500 гривень. Через деякий час вона зросла на 10%, а потім знизилась на 10%. Визначте нову ціну товару.
2. (15 балів) О 9 годині ранку зі станції A вирушив пасажирський поїзд, а слідом за ним об 11 годині з тієї ж станції вирушив швидкий поїзд. На якій відстані від станції A пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд, якщо швидкість пасажирського поїзда 54 км/год, а швидкого – 72 км/год?
3. (20 балів) Найменше спільне кратне двох чисел, які не діляться одне на одне, дорівнює 630, а їх найбільший спільний дільник дорівнює 18. Знайти ці числа.
4. (20 балів) Щоб пронумерувати сторінки книги, потрібно 1392 цифри. Скільки сторінок у цій книжці?
5. (30 балів) По колу вписали 2003 натуральних числа. Доведіть, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких є парною.

7 клас

1. (15 балів) З кошика взяли 3 яблука, потім третину від залишку, потім ще 3 яблука, після чого в кошику залишилася половина від початкової кількості яблук. Скільки яблук було в кошику спочатку?
2. (15 балів) Білка за 20 хвилин приносить горіх до домівки. Яку відстань при цьому вона долає, якщо без горіха вона біжить зі швидкістю 5 м/с, а з горіхом 3 м/с.
3. (20 балів) На дошці написано число 321321321321. Які цифри треба стерти, щоб отримати найбільше можливе число, яке ділиться на 9?
4. (20 балів) Доведіть, що значення виразу $96^7 - 22^5 - 48^6$ є кратним 10.
5. (30 балів) На столі лежать 18 олівців. Двоє учнів по черзі беруть один, два або три олівці. Програє той, хто візьме останній олівець. Як повинен грати перший учень, щоб виграти?

8 клас

1. (15 балів) Коли турист пройшов 1 *км* та половину решти, то з'ясувалося, що до кінця ще $1/3$ всього шляху та ще 1 *км*. Знайдіть довжину всього шляху.
2. (15 балів) У трикутнику ABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A.
3. (20 балів) Розв'яжіть рівняння $\left|2|x-1|-3\right|=5$.
4. (20 балів) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Довести, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
5. (30 балів) На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

9 клас

1. (15 балів) Порівняти числа: $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ і $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.
2. (15 балів) Цілі числа a, b, c, d задовольняють умову $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{a+b}{c+d}$. Чи може добуток $abcd$ дорівнювати 1000?
3. (20 балів) Довести, що довільний паралелограм можна розрізати рівно на 9 рівнобедрених трикутників.
4. (20 балів) При яких значеннях a рівняння $\left(x^2+(2a-1)x-2a\right)\cdot\left(x^2+(1-a)x-a\right)=0$ має рівно три різні корені?
5. (30 балів) У нескінченному місті усі квартали – квадрати одного розміру. Велосипедист стартував з перехрестя вулиць. Через півхвилини за ним поїхав інший велосипедист. Кожен їде зі сталою швидкістю 1 квартал у хвилину і на кожному перехресті вулиць повертає направо або наліво. Чи можуть вони зустрітися?

УМОВИ ЗАДАЧ

10 клас

1. (15 балів) Відомо, що $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} \le x + y$. Довести, що $x + y = 1$.
2. (15 балів) Розв'язати рівняння $\left|x^2 + 4x + 2\right| = \frac{5x+16}{3}$.
3. (20 балів) Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, а також $\angle CAD = \angle CDB$. Довести, що $AB + CD = AD$.
4. (20 балів) Дискримінант D квадратного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним. Скільки коренів може мати рівняння $P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0$?
5. (30 балів) Числа 1, 2, 3, …, 25 розташовують у квадратній таблиці 5×5 так, щоб у кожному рядку числа були розміщені у порядку зростання. Яке найменше значення може мати сума чисел у третьому стовпчику?

11 клас

1. (15 балів) Функція $f(x)$ має вид $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$. Чому дорівнює $f(3)$?
2. (15 балів) Довести, що якщо $\cos x \ne 0$, то $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \ge 4$.
3. (20 балів) Відрізок CH – висота прямокутного трикутника ABC, яка проведена до гіпотенузи AB. Точки O_1, O_2 і O є центрами вписаних кіл трикутників ACH, BCH і ABC відповідно. Довести, що $CO \perp O_1O_2$ і $CO = O_1O_2$.
4. (20 балів) Чи існує таке натуральне число a, що у послідовності $x_n = n^2 + 2007an + 2006a^2$ кожні два сусідніх члена є взаємно простими?
5. (30 балів) В квадраті зі стороною 1 розташовано 2006 рівносторонніх трикутників, сума периметрів яких дорівнює 300. Довести, що принаймні три з них мають спільну точку.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача №1

Оскільки початкова ціна товару становила 500 гривень, то після підвищення на 10% ціна товару становитиме $500+\frac{500}{100}\cdot 10=500+50=550$ гривень. Після зниження (проміжної) ціни товару на 10% нова ціна товару становитиме $550-\frac{550}{100}\cdot 10=550-55=495$ гривень.

Відповідь: 495 гривень.

Доповнення

Розв'яжемо поставлену задачу в загальному вигляді, а саме:
нехай початкова ціна товару становила x гривень. Через деякий час вона зросла на $p\%$ а потім знизилась на $p\%$. Визначимо остаточну ціну товару.

Оскільки початкова ціна товару становила x (умовних одиниць), то після підвищення на $p\%$ нова ціна товару становитиме $x+\frac{x}{100}\cdot p=x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$ гривень. Після зниження (проміжної) ціни товару на $p\%$, остаточна ціна товару становитиме

$$x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-\frac{x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)}{100}\cdot p=x\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)=x\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)$$

умовних одиниць.

Таким чином, остаточна ціна товару становить $x\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)$ (ум.од.)

!? Подумайте, якою буде остаточна ціна товару, якщо спочатку відбулось зниження ціни на $p\%$, а вже потім підвищення на $p\%$.

Розв'язання задач

Задача №2

Нехай t – час руху пасажирського поїзду до моменту, коли він повинен пропустити швидкий потяг. Тоді швидкий потяг до вказаної події рухався $t-2$ години. Оскільки на момент зазначеної події кожен з них подолав однакову відстань, то має місце рівність $54\cdot t=72\cdot(t-2)$.

Розв'яжемо одержане рівняння

$$54\cdot t=72\cdot(t-2);\ 54t=72t-144;\quad 72t-54t=144;\quad 18t=144;\quad t=\frac{144}{18}=8.$$

Таким чином, пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд через 8 годин з моменту руху зі станції A о 9–ій годині ранку.

І тому за ці 8 годин пасажирський поїзд подолає відстань $S=54\cdot 8=432$ *км*.

Отже, на відстані 432 *км* від станції A, швидкий поїзд наздожене пасажирський.

Відповідь: 432 *км*.

Задача №3

<u>І спосіб</u>

Нехай x і y – шукані числа. Тоді за умовою мають місце рівності

$$\text{НСК}(x,y)=630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7, \tag{1}$$

$$\text{НСД}(x,y)=18=2\cdot 3^2. \tag{2}$$

З (2) випливає, що шукані числа мають вид

$x=18\cdot x'$, $y=18\cdot y'$, де x' і y' – взаємно прості числа.

З (1) випливає два можливі випадки:

1) $x=18\cdot 5$, $y=18\cdot 7$ (або ж $x=18\cdot 7$, $y=18\cdot 5$);

2) $x=18\cdot 5\cdot 7$, $y=18\cdot 1$ (або ж $x=18\cdot 1$, $y=18\cdot 5\cdot 7$).

Оскільки шукані числа не діляться одне на одне, то розв'язки, що відповідають другому випадку, не задовольняють умову задачі. Тому шуканими числами є числа 90 і 126.

ІІ спосіб

Нехай x і y – шукані числа, причому $x > y$. Оскільки $\text{НСД}\left(x, y\right) = 18$, то $x = 18 \cdot x'$, $y = 18 \cdot y'$, де x' і y' – взаємно прості числа.

Оскільки для довільних натуральних чисел a, b справджується рівність $\text{НСК}\left(a, b\right) = \dfrac{a \cdot b}{\text{НСД}\left(a, b\right)}$, то для шуканих x і y справджується рівність $630 = \dfrac{x \cdot y}{18} = \dfrac{18x' \cdot 18y'}{18} = 18x' \cdot y'$. Звідки $x' \cdot y' = \dfrac{630}{18} = 35 = 5 \cdot 7$. Звідки

$$x' = 35,\ y' = 1 \quad \text{або ж} \quad x' = 7,\ y' = 5.$$

Тоді $x = 35 \cdot 18$, $y = 18$ або ж $x = 7 \cdot 18$, $y = 5 \cdot 18$.

Проте числа $x = 35 \cdot 18$, $y = 18$ не задовольняють умову задачі, оскільки x ділиться на y. Тому шуканими числами є числа 90 і 126.

Відповідь: 90 і 126.

Задача №4

Для нумерації перших 9-ти сторінок (довільної) книги знадобиться $9 \cdot 1$ цифр.

Для нумерації сторінок з 10-ої по 99-ту знадобиться $\left(99 - 10 + 1\right) \cdot 2 = 90 \cdot 2 = 180$ цифр.

Для нумерації сторінок з 100–ої по 999–ту знадобиться $\left(999 - 100 + 1\right) \cdot 3 = 2700$ цифр.

Оскільки для нумерації усіх сторінок книги знадобилось 1392 цифри, то у такій книзі сторінок більше ніж 99, але менше ніж 999.

Більше того, для нумерації сторінок книги, номери яких є тризначними числами, було витрачено точно $1392 - 9 \cdot 1 - 90 \cdot 2 = 1203$ цифр.

Тому число сторінок з тризначними номерами становить $\dfrac{1203}{3} = 401$.

Таким чином, у книзі, для нумерації усіх сторінок якої було використано 1392 цифр, точно $9 + 90 + 401 = 500$ сторінок.

Відповідь: 500.

Розв'язання задач

Задача №5

З 2003 натуральних чисел принаймні 1002 числа є числами однакової парності (парні або ж не парні).

Іншими словами: оскільки 2003 є непарним числом, то чисел однієї парності більше, ніж чисел іншої парності щонайменше як на 1.

Припустимо, що серед 2003 наведених чисел, наприклад, парних більше ніж непарних. Тоді, як зазначено вище, парних чисел принаймні 1002.

Зафіксуємо на колі які-небудь 1002 парних чисел з усіх парних чисел. Якщо припустити, що на колі не знайдеться два сусідніх числа, сума яких є парною, то це означатиме що числа, розташовані по колу, чергуються наступним чином – парне, непарне, парне, непарне і т.д.. Але ж тоді на колі повинно бути щонайменше 2004 числа. Отже, прийшли до протиріччя з умовою, бо по колу розташовано точно 2003 натуральні числа.

7 клас

Задача №1

Нехай у кошику спочатку було x яблук.
Після видалення 3 яблук у кошику залишилося $x-3$ яблук.
Після видалення третини яблук від залишку у кошику залишилося

$$x-3-\frac{x-3}{3}=(x-3)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}(x-3) \quad \text{(яблук).}$$

Після видалення ще трьох яблук у кошику залишилося $\frac{2}{3}(x-3)-3$ або ж $\frac{x}{2}$ яблук. Звідки маємо рівняння $\frac{2}{3}(x-3)-3=\frac{x}{2}$;

$$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{x}{2}+3; \qquad \frac{2}{3}(x-3)=\frac{x+6}{2}; \qquad 4(x-3)=3(x+6);$$

$$4x-12=3x+18; \qquad 4x-3x=12+18; \qquad x=30.$$

Розв'язавши рівняння одержали, що $x=30$. Тому в кошику спочатку було 30 яблук.

Відповідь: 30.

Задача №2

Нехай S – відстань, яку білка долає від своєї домівки (пункт A) до місця з горіхами (пункт B). Тоді відстань S від A до B білка без горіха долає за $\frac{S}{5}$ секунд. Відстань S від B до A білка з горіхом долає за $\frac{S}{3}$ секунд.

За умовою задачі на всю подорож за горіхом (шлях від A до B і назад) білка витрачає 20 хвилин або ж $20 \cdot 60 = 1200$ секунд. Тому має місце рівність $\frac{S}{5} + \frac{S}{3} = 1200$. Звідки $\frac{8}{15} S = 1200$ або ж $S = \frac{1200}{8} \cdot 15 = 150 \cdot 15 = 2250$.

Таким чином, при поході за горіхом і назад білка долає відстань 4500 метрів.

Відповідь: 4500 метрів.

Задача №3

Для розв'язання задачі скористаємося ознакою подільності натуральних чисел на 9: *на 9 діляться ті і лише ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9.*

Очевидно, що сума цифр даного числа $a = \overline{321321321321}$ становить 24.

Найбільшим натуральним числом, яке не перевищує 24 і ділиться на 9, є число 18. Оскільки $24 - 18 = 6$, то в даному числі a слід закреслити такі цифри, сума яких становить 6. Очевидно, що шукане число буде найбільшим, коли буде закреслена найменша кількість цифр. Оскільки в даному числі $a = \overline{321321321321}$ зустрічаються виключно цифри 1,2 і 3 (кожна точно чотири рази), то найменша кількість цифр, що закреслюються у a і сума яких дорівнює 6, становить 2. Тобто, коли видаляються точно дві «трійки». Отже, шукане число одержується із заданого в результаті закреслювання двох трійок.

Оскільки в даному числі a рівно чотири трійки (що займають 1-шу, 4-ту, 7-му та 10-ту позиції), то існує точно 6 різних способів закреслювання двох зазначених трійок. Шукане число буде найбільшим в тому випадку, коли будуть викресленими трійки, що займають 7-му і 10-ту позиції, тобто ті, що відповідають меншим розрядним одиницям. Отже, шуканим числом є число

$$\overline{321321\cancel{3}21\cancel{3}21} = 3213212121.$$

Відповідь: 3213212121.

Задача №4

I спосіб

Очевидно, що остання цифра натурального степеня багатоцифрового числа співпадає з останньою цифрою відповідного степеня числа, що задається останньою його цифрою. Тоді отримуємо:

96^7 закінчується цифрою 6, 22^5 – цифрою 2, а 48^6 – цифрою 4.

Звідси випливає, що задане число закінчується цифрою 0, а отже воно ділиться на 10.

II спосіб

$$96^7 - 22^5 - 48^6 = 96^7 - \left(\left(2\cdot 11\right)^5 + \left(2^4\cdot 3\right)^6\right) = 96^7 - 2^5\cdot\left(11^5 + 3^6\cdot 2^{19}\right) =$$

$$= 96^7 - 2^5\cdot\left(11^5 + 81\cdot 9\cdot\frac{1}{2}\left(2^{10}\right)^2\right) = 96^7 - 32\cdot\left(11^5 + 729\cdot\frac{1}{2}\cdot 1024^2\right).$$

Оскільки $6\times 6 = 36$, то кожен степінь (з натуральним показником) натурального числа, що закінчується цифрою 6, також є числом, яке має останню цифру 6.

Тому останньою цифрою числа 96^7 є цифра 6.

Очевидно, що число 1024^2 закінчується цифрою 6. Тому число $\frac{1}{2}\cdot 1024^2$ закінчується цифрою 3, а число $729\cdot\frac{1}{2}\cdot 1024^2$ закінчується цифрою 7. Оскільки число 11^5 закінчується цифрою 1, то число $11^5 + 729\cdot\frac{1}{2}\cdot 1024^2$ закінчується цифрою 8. Отже, число $32\cdot\left(11^5 + 729\cdot\frac{1}{2}\cdot 1024^2\right)$ закінчується цифрою 6.

І тому останньою цифрою числа $96^7 - 32\cdot\left(11^5 + 729\cdot\frac{1}{2}\cdot 1024^2\right)$ є цифра 0.

Отже, число ділиться на 10.

<u>ІІІ спосіб</u> (не для 7 класу)

Нагадаємо таблицю Паскаля для визначення біноміальних коефіцієнтів степеня двочлена

	$(a+b)^n$	$(a-b)^n$
$n=1$	1 1	1 –1
$n=2$	1 2 1	1 –2 1
$n=3$	1 3 3 1	1 –3 3 –1
$n=4$	1 4 6 4 1	1 –4 6 –4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1	1 –5 10 –10 5 –1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1	1 –6 15 –20 15 –6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1	1 –7 21 –35 35 –21 7 –1

Тоді має місце рівність

$$96^7-22^5-48^6=(100-4)^7-(20+2)^5-(50-2)^6=$$

$$=100^7-7\cdot100^6\cdot4+21\cdot100^5\cdot4^2-35\cdot100^4\cdot4^3+35\cdot100^3\cdot4^4-21\cdot100^2\cdot4^5+$$

$$+7\cdot100^1\cdot4^6\boxed{-1\cdot4^7}-1\cdot20^5-5\cdot20^4\cdot2-10\cdot20^3\cdot2^2-10\cdot20^2\cdot2^3-5\cdot20^1\cdot2^4\boxed{-1\cdot2^5}-$$

$$-1\cdot50^6+6\cdot50^5\cdot2^1-15\cdot50^4\cdot2^2+20\cdot50^3\cdot2^3-15\cdot50^2\cdot2^4+6\cdot50^1\cdot2^5\boxed{-1\cdot2^6}=$$

$$=100\left(100^6-28\cdot100^5+21\cdot4^2\cdot100^4-35\cdot4^3\cdot100^3+35\cdot4^4\cdot100^2-21\cdot4^5\cdot100+7\cdot4^6\right)-$$

$$-20\cdot\left(1\cdot20^4+5\cdot20^3\cdot2+10\cdot20^2\cdot2^2+10\cdot20^1\cdot2^3+5\cdot2^4\right)-$$

$$-50\left(1\cdot50^5-6\cdot50^4\cdot2^1+15\cdot50^3\cdot2^2-20\cdot50^2\cdot2^3+15\cdot50^1\cdot2^4-6\cdot2^5\right)-\left(4^7+2^5+2^6\right).$$

Оскільки

$4^7+2^5+2^6=2^{14}+2^5+2^6=2^5\left(2^9+1+2\right)=2^4\cdot2\left(5012+3\right)=2^4\cdot1030$, то число $\left(96^7-22^5-48^6\right)$ ділиться на 10.

Розв'язання задач

Задача №5

Для того щоб, згідно з правилами гри, перший учень виграв, на останньому – k –му своєму кроці він повинен залишити 1 олівець (для другого). Для того, щоб йому це вдалося, на передостанньому – $(k-1)$-му кроці він повинен залишити для другого 5 олівців:

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 3 олівця;
якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 2 олівця;
якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Так само, для того, щоб після $(k-1)$-го кроку першому вдалося залишити для другого 5 олівців, після $(k-2)$-го кроку перший повинен залишити для другого 9 олівців:

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому $\left(k-1\right)$-му кроці повинен взяти 3 олівця;
якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 2 олівця;
якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Продовжуючи вказані міркування маємо, що перший учень для гарантованого виграшу в даній грі повинен залишати після себе «в зворотному напрямку» 1; 5; 9; 13; 17 олівців.

Отже, перший учень, щоб виграти, повинен грати наступним чином:

першого разу він повинен взяти 1 олівець (бо 1 – це остача від ділення числа $17=\left(18-1\right)$ на число 4).

при кожному наступному виборі керуватися правилом:

«якщо другий візьме	1 олівець,	то перший повинен взяти 3 олівці,
якщо другий візьме	2 олівці,	то перший повинен взяти 2 олівці,
якщо другий візьме	3 олівці,	то перший повинен взяти 1 олівець».

Доповнення

!? Як повинен грати перший учень, щоб виграти, якщо олівців не 18 а, наприклад, 23 або ж 17?

!? Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців (18) кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше 4-ьох (5-ти) олівців?

!? Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців $n \neq 4k+1$ кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше m ($m < n$) олівців?

8 клас

Задача №1

Нехай S (км) – довжина всього шляху. За умовою коли турист пройшов 1 (км) та половину решти шляху $\frac{S-1}{2}$ (км), то з'ясувалося, що до кінця залишилося ще $\frac{1}{3}$ всього шляху S та ще 1 (км) або, що те ж саме, $\frac{1}{3}S+1$ (км). Тому має місце рівність $\left(1+\frac{S-1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}S+1\right)=S$, звідки $2+\frac{3(S-1)+2S}{6}=S$ або ж $5S-3=6S-12$. Тому $S=9$.

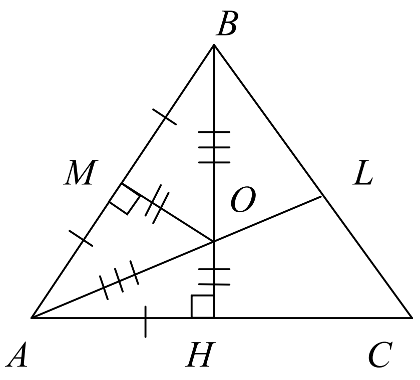
Відповідь: 9 км.

Задача №2

Нехай у трикутнику ABC бісектриса AL кута A, висота BH та серединний перпендикуляр до сторони AB в точці M перетинаються в точці O.

Тоді за властивістю бісектриси кута (трикутника) маємо, що $OH = OM$. Звідки випливає що прямокутні трикутники AMO і AHO рівні за катетом і гіпотенузою.

Розв'язання задач



Оскільки OM є одночасно і висотою і медіаною трикутника AOB, то трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB. Тому $\angle BAO = \angle ABO$.

Таким чином, з урахуванням рівності вказаних трикутників, маємо рівність відповідних кутів, а саме: $\angle HAO = \angle BAO = \angle ABO$.

Оскільки $\angle HAO + \angle BAO + \angle ABO = 90^0$, то кожен з кутів $\angle HAO, \angle BAO, \angle ABO$ дорівнює 30^0. Тому $\angle A = 60^0$.

Відповідь: 60^0.

Задача №3

I спосіб

За властивістю модуля маємо наступні рівняння

$2|x-1|-3=5$ або $2|x-1|-3=-5$;

Розв'яжемо кожне з них:

$|x-1|=4$ $\qquad$ $|x-1|=-1$;

$x-1=4$ або $x-1=-4$ $\qquad$ Рівняння не має коренів.

$x=5$ $\qquad$ $x=-3$.

II спосіб

Нехай $|x-1|=t$, $t \ge 0$. Тоді дане рівняння $\left|2|x-1|-3\right|=5$ набуває вид $|2t-3|=5$. Піднесемо обидві частини останнього рівняння до другого степеня та розв'яжемо одержане квадратне рівняння: $4t^2-12t+9=25$;

$$t^2-3t-4=0;$$

$$(t+1)(t-4)=0.$$

$t_1=-1$ не задовольняє умові $t \ge 0$. А тому $t=4$. Звідки $|x-1|=4$.

Таким чином, $x-1=4$ або $x-1=-4$. Звідки $x_1=-3$; $x_2=5$.

Відповідь: -3; 5.

Задача №4

I спосіб

Нехай x, y, z – вказані цілі числа. Тоді $(x+y+z)=6\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Оскільки $(x+y+z)^3=(x+(y+z))^3=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3=$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+3yz(y+z)=$$

$$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x^2+x(y+z)+yz)=$$

$$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x(x+y+z)+yz)=$$

$$=(x^3+y^3+z^3)+3x(y+z)(x+y+z)+3x(y+z)yz,$$

то $(x^3+y^3+z^3)=6\cdot(36k^3)-3x(y+z)(x+y+z)-3x(y+z)yz=$

$$=6\cdot(36k^3)-6(3kx)(y+z)-3(y+z)xyz$$

Для довільних двох цілих чисел y і z або їх сума $(y+z)$ ділиться на два, або ж їх добуток yz ділиться на два.

Тоді при довільних цілих x, y, z, k вираз $3(y+z)xyz$ завжди ділиться на шість. Тому і вираз $6\cdot(36k^3)-6(3kx)-3(y+z)xyz$ ділиться на шість.

Отже, сума кубів вказаних чисел ділиться на 6.

II спосіб

Подамо вираз $x^3+y^3+z^3$ у наступному вигляді

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)+(x+y+z)=$$

$$=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)+(x+y+z)=$$

$$=x(x^2-1)+y(y^2-1)+z(z^2-1)+(x+y+z)=$$

$$=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z).$$

Звідки

$$x^3+y^3+z^3=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z) \quad (8.4)$$

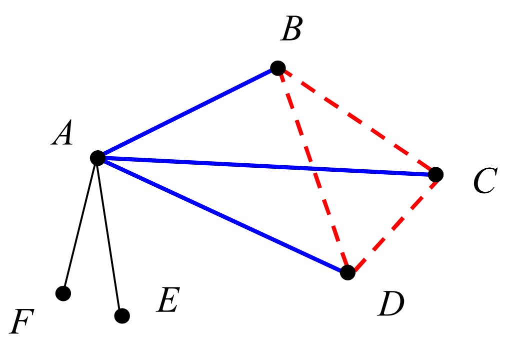
Зауважимо, що з трьох послідовних цілих чисел одне завжди ділиться на три, і принаймні одне ділиться на два. Тому добуток трьох послідовних цілих чисел завжди ділиться на шість.

Отже, кожен з перших трьох доданків правої частини рівності (8.4) ділиться на шість. За умовою останній доданок – вираз $(x+y+z)$ – також ділиться на шість. І тому права частина рівності (8.4), а разом з нею і ліва частина – вираз $(x^3+y^3+z^3)$, ділиться на шість.

Більше того, з рівності (8.4) випливає, що сума кубів $x^3+y^3+z^3$ трьох цілих чисел ділиться на шість тоді і лише тоді, коли на шість ділиться сума цих чисел.

Задача №5

Нехай на площині задано шість точок A, B, C, D, E, F загального положення (жодні три з яких не лежать на одній прямій).



За умовою кожні дві точки сполучено відрізком червоного або синього кольору, та з кожної точки виходить п'ять відрізків.

Тоді за **принципом Діріхлє** <u>з кожної точки</u> (зокрема точки A) <u>виходить принаймні три відрізки одного кольору</u> (червоного або синього).

Без втрати загальності будемо вважати, що відрізки AB, AC і AD одного кольору. Заради визначеності будемо вважати їх синіми.

Якщо припустити, що при довільному розфарбуванні відрізків (у вказаний за умовою задачі спосіб) не існує трикутника зі сторонами одного кольору, то відрізок BC повинен бути червоного кольору (бо сторони AB і AC синього кольору). Так само відрізки CD і BD повинні бути червоного кольору. Але ж тоді всі сторони трикутника BCD червоного кольору. Приходимо до протиріччя з припущенням. Отже наше припущення є хибним, і тому **при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні один трикутник зі сторонами одного кольору.**

<u>**Доповнення**</u>

Доведемо більш сильне твердження, а саме, що:

при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні два трикутники, сторони кожного з яких розфарбовано в один колір (можливо різний для кожного з трикутників).

За доведеним раніше, існує принаймні один трикутник, сторони якого розфарбовано в один колір. Без втрати загальності можна вважати, що це саме трикутник BCD.

Припустимо обернене, що крім $\triangle BCD$ іншого трикутника зі сторонами одного кольору не існує. Тоді існують **лише наступні суттєво різні випадки**:

1) коли відрізки CA, CF, CE червоного кольору. Тоді відрізки AF, FE і EA повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник AFE зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 1).

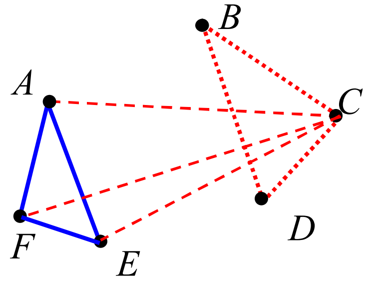


Рис. 1

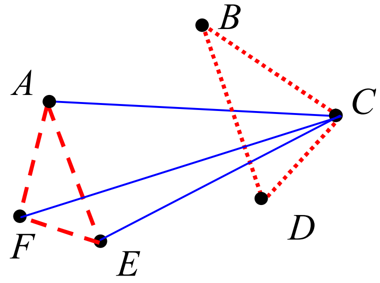


Рис. 2

2) коли відрізки CA, CF, CE синього кольору. Тоді відрізки AF, FE і EA повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник AFE зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 2).

3) коли відрізки CA і CF червоного, а CE синього кольору. Тоді відрізки AB, AF і BF повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник ABF зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 3).

4) коли відрізки CA і CE червоного, а CF синього кольору. Тоді відрізки AB, AE і BE повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник ABE зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 4).

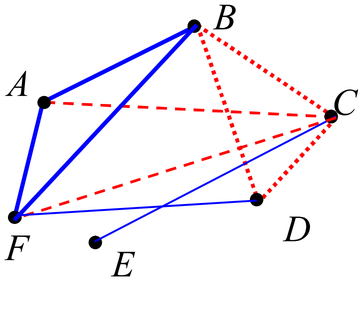


Рис. 3

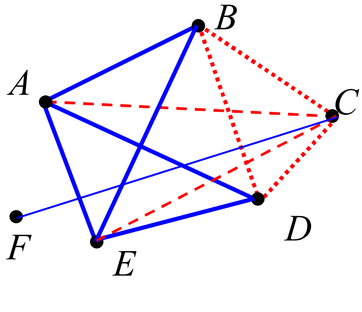


Рис. 4

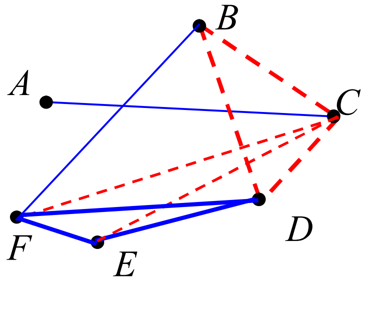


Рис. 5

5) коли відрізки CF і CE червоного, а CA синього кольору. Тоді відрізки FE, ED і DF повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник FED зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 5).

6) коли відрізок CA червоного, а CF і CE синього кольору. Тоді відрізок FE повинен бути червоного а AB і AD синього кольору. Крім того:

6.1) якщо відрізок AF червоного кольору, то відрізок AE повинен бути синього кольору. І, як наслідок, відрізки BE і ED можуть бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BED зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 6.1);

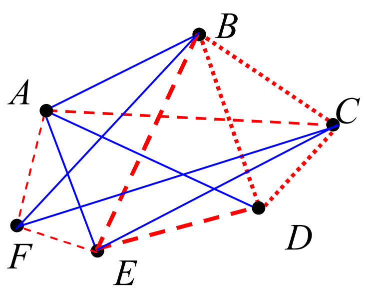


Рис. 6.1

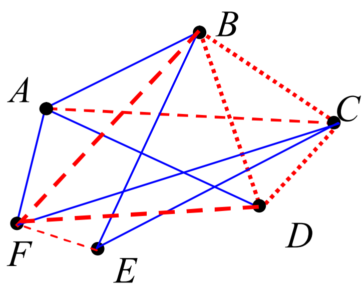


Рис. 6.2

6.2) якщо ж відрізок AF синього кольору, то відрізки BF і FD повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BFD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 6.2).

7) коли відрізок CF червоного, а CA і CE синього кольору. Тоді відрізок AE червоного а FD і FB синього кольору. Крім того:

7.1) якщо відрізок FE червоного кольору, то відрізок AF може бути лише синього кольору. І як наслідок, AB може бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник ABF зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 7.1);

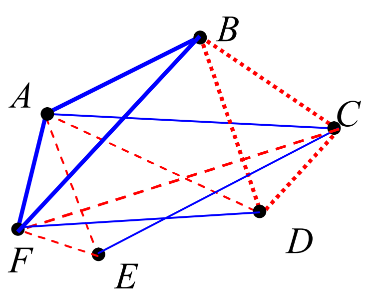


Рис. 7.1

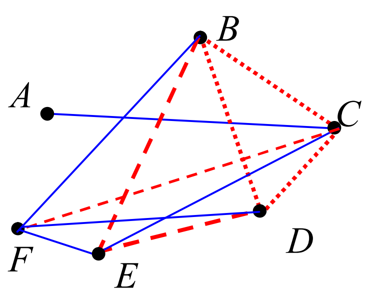


Рис. 7.2

7.2) якщо ж відрізок FE синього кольору, то відрізки BE і ED можуть бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BED зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 7.2).

8) коли відрізок CE червоного, а CA і CF синього кольору. Тоді відрізки ED і BE повинні бути синього а AF червоного кольору. Крім того:

8.1) якщо відрізок FE червоного кольору, то відрізок AE повинен бути синього кольору. І як наслідок відрізки AD і AB повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник ABD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 8.1);

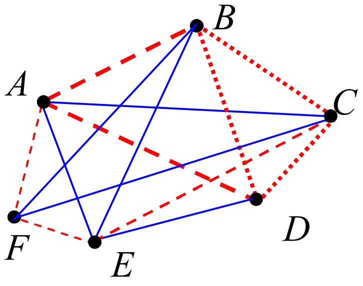


Рис. 8.1

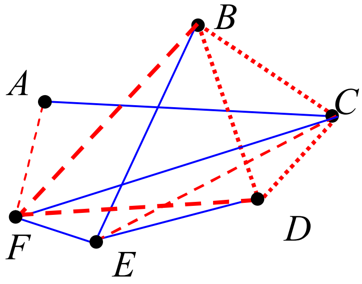


Рис. 8.2

8.2) якщо ж відрізок FE синього кольору, то відрізки BF і FD повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BFD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 8.2).

Таким чином, при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні два трикутники, сторони кожного з яких розфарбовано в один колір (можливо різний для кожного з трикутників).

Розв'язання задач

9 клас

Задача №1

<u>І спосіб</u>

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

Таким чином $\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$

<u>ІІ спосіб</u>

Покажемо, що дані числа є рівними. Для цього достатньо показати справедливість рівності

$$1=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}-2\right)^2}=\left|3-\sqrt{6}\right|+\left|\sqrt{6}-2\right|=3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2=1\,.$$

Відповідь: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$

<u>Доповнення</u>

Нехай $a,b,c>0$. Тоді

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{a+2\frac{b}{2}\sqrt{c}+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}+c\right)^2-\frac{b^2-4\left(a-c\right)}{4}}\,.$$

Якщо $b^2=4\left(a-c\right)$, то $\quad \sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}+c\right)^2}=\left|\dfrac{b}{2}+c\right|=\dfrac{b}{2}+c\,.$

Аналогічно, якщо $b^2=4\left(a-c\right)$, то $\sqrt{a-b\sqrt{c}}=\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}-c\right)^2}=\left|\dfrac{b}{2}-c\right|.$

Задача №2

І спосіб

З'ясуємо, чи може добуток $abcd$ дорівнювати 1000, якщо цілі числа a, b, c і d задовольняють умові $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$.

Отже, нехай $d \neq \pm c$, тоді $(a-b)(c+d)=(a+b)(c-d)$ або ж

$$ac+ad-bc-bd=ac-ad+bc-bd$$

Звідки $2(ad-bc)=0$. Тому $ad=bc$. Таким чином, добуток $abcd$ можна подати у вигляді $abcd=ad\cdot bc=(ad)^2$.

Якщо припустити, що при деяких цілих a і d справджується рівність

$$(ad)^2=1000=\left(10\sqrt{10}\right)^2,$$

то з неї випливатиме, що добуток цілих чисел a і d є числом $10\sqrt{10}$, або ж, що

$$\frac{ad}{10}=\sqrt{10},$$

чого бути не може, оскільки ліва частина останньої рівності є числом раціональним, а права її частина – $\sqrt{10}$ – ірраціональним числом.

ІІ спосіб

Нехай $d \neq \pm c$, тоді з умови $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}=t$ маємо справедливість наступних рівностей $\begin{cases} a-b=t(c-d) \\ a+b=t(c+d) \end{cases}$ при деякому сталому значені t. Звідки

$$\begin{cases} 2a=2tc \\ 2b=2td \end{cases}, \qquad \text{або ж} \qquad \begin{cases} a=tc \\ b=td \end{cases}.$$

Тому добуток $abcd$ можна подати у вигляді $abcd=tctdcd=(tcd)^2$.

Якщо припустити, що при деяких цілих c, d і раціональному t справджується рівність $(tcd)^2=1000=\left(10\sqrt{10}\right)^2$, то з неї випливатиме, що добуток раціональних чисел c, d і t є числом $10\sqrt{10}$, або ж що $\frac{tcd}{10} = \sqrt{10}$, чого бути не може, оскільки ліва частина останньої рівності є числом раціональним, а права її частина – $\sqrt{10}$ – ірраціональним числом.

Відповідь: не може.

<u>**Доповнення**</u>

Нагадаємо в який спосіб доводиться, що, наприклад, число $\sqrt{10}$ є ірраціональним числом. Доведення проводиться методом від супротивного,

а саме: припустимо, що число $\sqrt{10}$ є раціональним числом.

Тоді додатне число ($\sqrt{10}$) можна подати у вигляді <u>**нескоротного**</u> дробу $\frac{m}{n} = \sqrt{10}$, де m і n – натуральні числа.

Піднесемо далі обидві частини рівності $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$ до квадрату. В результаті матимемо, що $10 = \frac{m^2}{n^2}$ або ж, що

$$m^2 = 10n^2. \tag{9.2.1}$$

Оскільки права частина рівності (9.2.1) ділиться на 10, то число m^2 також повинно ділитися на 10 (на 2 і на 5 одночасно), і тому саме число m повинно ділитися на прості числа 2 і 5 одночасно. Тому число m має вид $m = 10k$.

Тоді рівність (9.2.1) можна переписати у вигляді $100k^2 = 10n^2$, або ж

$$n^2 = 10k^2. \tag{9.2.2}$$

В силу зазначених вище причин, з рівності (9.2.2) також випливатиме, що число n має вид $n = 10l$.

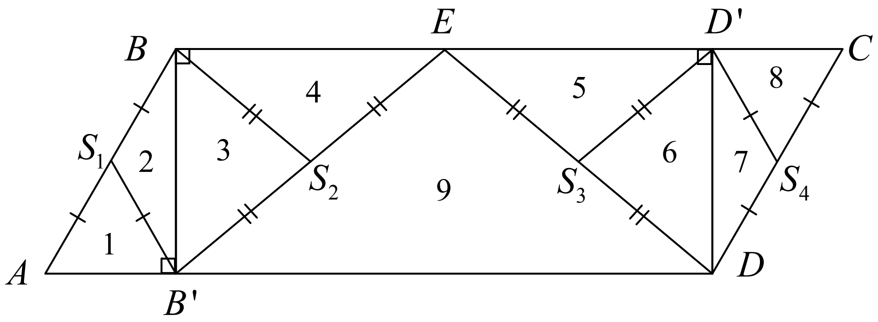
Але ж тоді числа $m = 10k$ і $n = 10l$ є такими, що дріб $\frac{m}{n}$ є скоротним. Прийшли до протиріччя з припущенням, і тому наша гіпотеза про раціональність числа $\sqrt{10}$ є хибною. Отже, воно є ірраціональним.

Задача №3

I спосіб

Нехай $ABCD$ – довільний паралелограм. Проведемо висоти BB', DD'. Позначимо далі через E середину відрізка BD'.

1) Розглянемо прямокутний трикутник $AB'B$ і нехай S_1 – середина гіпотенузи AB. Тоді, як відомо, S_1 є центром описаного навколо прямокутного трикутника $AB'B$ кола. Тому $AS_1 = S_1B = S_1B'$. Звідки трикутники AS_1B' і $B'S_1B$ є рівнобедреними.



2) Розглянемо прямокутний трикутник $B'BE$ і нехай S_2 – середина гіпотенузи $B'E$. Тоді трикутники $B'S_2B$ і BS_2E є рівнобедреними.

3) Розглянемо прямокутний трикутник $ED'D$ і нехай S_3 – середина гіпотенузи ED. Тоді трикутники ES_3D' і $D'S_3D$ є рівнобедреними.

4) Розглянемо прямокутний трикутник $DD'C$ і нехай S_4 – середина гіпотенузи CD. Тоді трикутники $D'S_4C$ і $D'S_4D$ є рівнобедреними.

5) За побудовою чотирикутник $BB'DD'$ є прямокутником, а E – середина BD'. Тому прямокутні трикутники $B'BE$ і $DD'E$ є рівними (за двома катетами). Звідки $B'E = ED$. Отже трикутник $B'ED$ є рівнобедреним.

Таким чином, за допомогою **восьми** розрізів довільний паралелограм можна розрізати на дев'ять рівнобедрених трикутників. На рисунку їх позначено цифрами від 1 до 9.

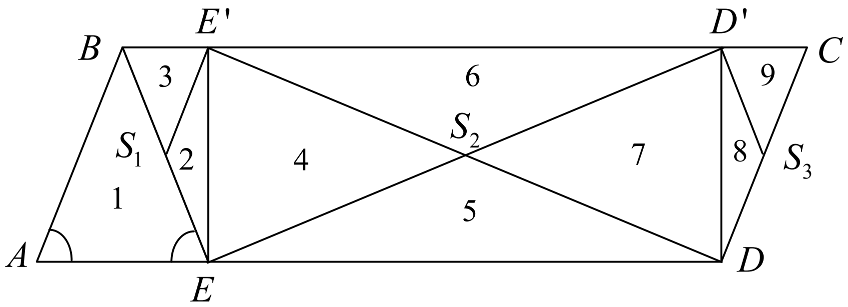
Зауважимо, що у випадку коли висоти BB' і DD' паралелограма $ABCD$ збігаються (співпадають), слід обрати іншу пару внутрішніх паралельних висот паралелограма.

Крім того, запропонований спосіб **не дає бажаного результату** для випадку, коли **паралелограм є прямокутником, зокрема квадратом**.

!? Подумайте та дайте відповідь на питання: «Чи існує паралелограм, у якого кожні дві внутрішні паралельні висоти співпадають?»

II спосіб

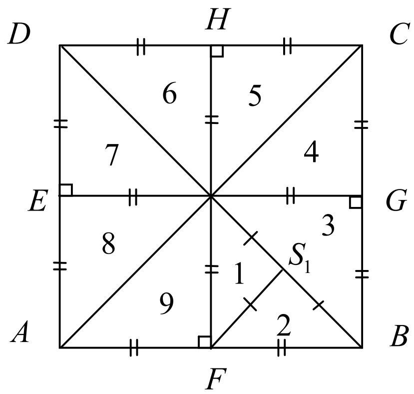
Нижче наведено спосіб, при якому використовується **сім** розрізів для розрізання довільного паралелограма на дев'ять рівнобедрених трикутників.



Зауважимо, що наведений спосіб може бути застосований для довільного паралелограма, що **не є ромбом,** зокрема (або) **квадратом**.

Доповнення

З урахуванням зроблених вище зауважень, наведемо спосіб шуканого розрізання для випадку, коли паралелограм є квадратом.



!? Чи можна здійснити розрізання довільного паралелограма на дев'ять рівнобедрених трикутників за допомогою шести або менше розрізів? Якщо так, то для яких окремих випадків паралелограма?

Задача №4

$$\left(x^2+(2a-1)x-2a\right)\cdot\left(x^2+(1-a)x-a\right)=0 \qquad (9.4)$$

I спосіб

$$\left(x^2+(2a-1)x-2a\right)\cdot\left(x^2+(1-a)x-a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+(2a-1)x-2a=0 & (1) \\ x^2+(1-a)x-a=0 & (2) \end{array}\right.$$

Розв'яжемо рівняння (1). Оскільки

$D_1=(2a-1)^2+8a=4a^2-4a+1+8a=4a^2+4a+1=(2a+1)^2\ge 0 \quad \forall a\in\mathbb{R}$, то

$$x_{1,1}=\frac{1-2a-2a-1}{2}=-2a; \qquad x_{1,2}=\frac{1-2a+2a+1}{2}=1.$$

Розв'яжемо рівняння (2). Оскільки

$D_2=(1-a)^2+4a=a^2-2a+1+4a=a^2+2a+1=(a+1)^2\ge 0 \quad \forall a\in\mathbb{R}$, то

$$x_{2,1}=\frac{a-1-a-1}{2}=-1; \qquad x_{2,2}=\frac{a-1+a+1}{2}=a.$$

Рівняння (9.4) має три різні корені тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов

$$\begin{cases}\boxed{x_{1,1}=x_{1,2}}\\ x_{2,1}\ne x_{2,2}\\ x_{1,2}\ne x_{2,2}\end{cases} \text{або } \begin{cases}\boxed{x_{1,1}=x_{2,1}}\\ x_{1,2}\ne x_{2,2}\\ x_{1,1}\ne x_{2,2}\end{cases}, \text{ або } \begin{cases}\boxed{x_{1,1}=x_{2,2}}\\ x_{1,1}\ne x_{1,2}\\ x_{1,1}\ne x_{2,1}\end{cases}, \text{ або } \begin{cases}\boxed{x_{1,2}=x_{2,2}}\\ x_{1,1}\ne x_{1,2}\\ x_{1,1}\ne x_{2,1}\end{cases}, \text{ або ж } \begin{cases}\boxed{x_{2,1}=x_{2,2}}\\ x_{1,1}\ne x_{1,2}\\ x_{1,1}\ne x_{2,1}.\end{cases}$$

Звідки

$$\left[\begin{array}{l} -2a=1 \\ -2a=-1 \\ -2a=a \\ 1=a \\ -1=a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ a=0 \\ a=1 \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Таким чином, рівняння (9.4) має три різні корені тоді і лише тоді, коли $a\in\left\{-1;-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1\right\}$.

II спосіб

$$\left(x^2+(2a-1)x-2a\right)\cdot\left(x^2+(1-a)x-a\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2a)(x+1)(x-a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\left(x^2+ax-2a^2\right)=0. \qquad (9.5)$$

Очевидно, що розв’язками рівняння $x^2+ax-2a^2=0$ є числа

$$x_1=\frac{-a-3a}{2}=-2a \text{ та } x_2=\frac{-a+3a}{2}=a.$$

Рівняння (9.5) має три різні корені тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_1\neq 1 \\ x_1\neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\neq x_2 \\ x_1=1 \\ x_2\neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\neq x_2 \\ x_1=-1 \\ x_2\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\neq x_2 \\ x_2=1 \\ x_1\neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\neq x_2 \\ x_2=-1 \\ x_1\neq 1. \end{cases}$$

Звідки

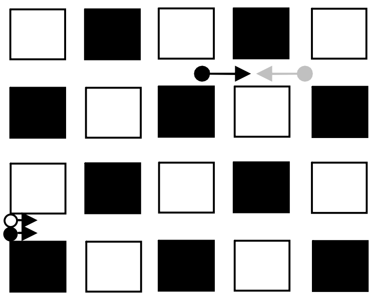
$$\left[\begin{array}{l} -2a=a \\ -2a=1 \\ -2a=-1 \\ a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ a=1 \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\pm 1; \pm\frac{1}{2}; 0$.

Задача №5

І спосіб

Розфарбуємо квартали міста у шаховому порядку так, щоб праворуч від першого і другого велосипедиста у момент старту знаходився чорний квартал.



Тоді **у будь-який момент часу праворуч від кожного з велосипедистів знаходиться чорний квартал.**

Це дійсно так, бо на кожному перехресті (крім першого – стартового) кожен велосипедист обов'язково повертає:

або **ліворуч**, і тоді праворуч від нього знаходиться чорний квартал відмінний від того, який він щойно проїхав,

або ж **праворуч**, і тоді велосипедист огинає (залишаючись зліва від нього) той самий чорний квартал, який щойно проїхав.

1) Зустріч велосипедистів не може відбутися на жодному з перехресть. Це випливає з того, що перший велосипедист (рухаючись зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину) з'являється на перехрестях кожної хвилини (з моменту початку руху), тобто, в моменти часу t $(t = 1, 2, ...)$, які <u>є натуральними числами</u>.

Оскільки другий велосипедист починає свій рух через півхвилини після першого і рухається зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину, то на перехрестях він з'являється в моменти часу $t + 0{,}5$ $(t = 1, 2, ...)$, які <u>не є натуральними числами</u>. Тому не існує такого моменту часу, в який велосипедисти одночасно з'являються на перехрестях.

2) Оскільки велосипедисти рухаються з однаковою швидкістю і різницею у часі в півхвилини, то жоден з них не може наздогнати іншого:

на перехресті цього статися не може за доведеним раніше;

посеред деякого з кварталів цього також не може статися, оскільки з припущення про обернене і умови руху з однаковою швидкістю, на наступному перехресті вони з'являться одночасно, чого не може бути.

3) Отже, зустріч велосипедистів якщо і є можливою, то лише посеред деякого з кварталів, причому, за умови руху назустріч один одному. Але останнє також не можливе, бо для одного з них в цьому разі чорний квартал буде розташований ліворуч, а для іншого – праворуч.

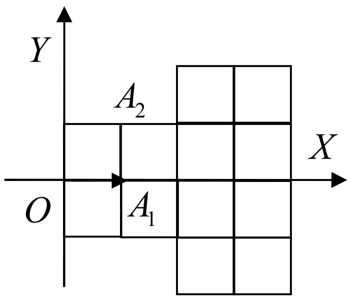
II спосіб

1) Жоден з велосипедистів не може наздогнати іншого оскільки другий стартував на півхвилини пізніше першого, і на протязі всього часу вони рухались з постійними однаковими швидкостями.

На перехресті кварталів зустріч також не може відбутися, оскільки велосипедисти з'являються на них в різні моменти часу.

Надалі будемо вважати, що кожен квартал міста обмежують (по периметру) 4 різні вулиці, які починаються і закінчуються в межах цього кварталу.

2) Звернемо увагу на той факт, що кожен з велосипедистів для



повернення у початкове положення (на стартове перехрестя), рухаючись згідно зазначених правил, повинен подолати парну кількість вулиць міста.

Нехай т. O – стартове перехрестя, а т. A_1 – перше перехрестя, на якому повертають велосипедисти.

Зафіксуємо в площині міста прямокутну систему координат XOY з початком в т. O, віссю OX, додатній напрямок якої визначається т. A_1, та одиницею виміру OA_1. Додатній напрямок на осі OY визначається у звичний спосіб.

Дослідимо траєкторію руху велосипедиста, початок і кінець якої співпадають з точкою O. Для цього позначимо через A_i $(i = 1, 2, ...)$ перехрестя, які велосипедист послідовно проїжджає (належать траєкторії його руху – $OA_1A_2...A_nO$). Оскільки на кожному перехресті A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ велосипедист повертає ліворуч або праворуч, то положення точки A_{i+1} $(A_{n+1} = O)$ відрізняється від положення точки A_i лише одною координатою – першою або другою.

Більше того: якщо вулиця A_iA_{i+1} паралельна осі OX, а напрямок від перехрестя A_i до перехрестя A_{i+1} співпадає (не співпадає) з додатним напрямком осі OX, то абсциса точки A_{i+1} збільшиться (зменшиться) на одну одиницю у порівнянні з абсцисою точки A_i. Те ж саме має місце для вулиць A_jA_{j+1} паралельних осі OY.

Той факт, що велосипедист повернувся на стартове перехрестя (у т. $O(0,0)$) означає, що:

2.1) сумарне число вулиць, яке велосипедист проїжджав паралельно осі OX є парним – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OX, стільки ж і у від'ємному її напрямку;

2.2) сумарне число вулиць, яке велосипедист проїжджав паралельно осі OY є парним – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OY, стільки ж і у від'ємному її напрямку.

Таким чином, довільна траєкторія $OA_1A_2...A_nO$ велосипедиста, який рухається кварталами міста згідно зазначених правил, містить <u>парну кількість вулиць</u>.

3) Покажемо тепер, що велосипедисти не можуть зустрітися посеред деякої вулиці, рухаючись на зустріч один одному.

Доведення проведемо методом від супротивного, а саме:
припустимо, що вказана зустріч сталася посеред певної вулиці (між двома перехрестями однієї вулиці). Тоді на момент зустрічі перший велосипедист подолав $3/4$, а другий – $1/4$ цієї вулиці. Більше того, до зазначеної події, кожен з них подолав однакову кількість k повних вулиць. Отже, велосипедисти разом на момент зустрічі подолали непарну кількість $2k+1$ вулиць міста.

Якщо, перший з велосипедистів після зустрічі продовжить рух, повторивши <u>траєкторію руху другого в зворотному напрямку</u>, то через певний час він повернеться у початкове положення (на стартове перехрестя) і подолає при цьому (з моменту свого старту) непарну кількість вулиць міста. Чого бути не може, оскільки будь-яка траєкторія руху, що починається і закінчується у фіксованому перехресті, містить парну кількість вулиць міста.

Прийшли до протиріччя з припущенням, і тому наша гіпотеза про можливість зустрічі велосипедистів посеред вулиці (рухаючись на зустріч один одному) є хибною. Таким чином, велосипедисти не можуть зустрітися.

Відповідь: ні.

10 клас

Задача №1

I спосіб

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \\ y-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

II спосіб

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+2\le 4x+4y \Leftrightarrow 4x^2-4x+1+4y^2-4y+1\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

III спосіб

Нехай $y=a$, тоді дану нерівність можна подати у вигляді

$$x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}\le 0.$$

Розглянемо ліву частину останньої нерівності як квадратичний тричлен відносно змінної x та розв'яжемо цю нерівність при всіх значеннях параметра a.

$$D=1^2-4\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=-4a^2+4a-1=-\left(4a^2-4a+1\right)=-(2a-1)^2.$$

При всіх значеннях $a\ne\frac{1}{2}$ дискримінант $D<0$. Оскільки гілки параболи $y=x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}$ спрямовані вгору, то при $a\ne\frac{1}{2}$ нерівність не має жодного розв'язку.

При $a=\frac{1}{2}$ дискримінант $D=0$. І тому нерівність $x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}\le 0$ при $a=\frac{1}{2}$ має єдиний розв'язок $x=\frac{1}{2}$.

Таким чином, дана нерівність має єдиний розв'язок $x=\frac{1}{2}$ при $y=\frac{1}{2}=a$. І тому $x+y=1$.

Задача №2

Якщо $\frac{5x+16}{3}<0$, то рівняння коренів не має, оскільки в цьому випадку ліва частина рівняння є невід'ємною, а права – від'ємною величиною.

Нехай $\frac{5x+16}{3}\ge 0$, тоді $\left|x^2+4x+2\right|=\frac{5x+16}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{16}{5} & (1) \\ \left[\begin{array}{ll} x^2+4x+2=-\frac{5x+16}{3} & (2) \\ x^2+4x+2=\frac{5x+16}{3} & (3) \end{array}\right. \end{cases}$

Розв'яжемо окремо рівняння (2) і (3):

$$x^2+4x+2=-\frac{5x+16}{3}\Leftrightarrow 3x^2+12x+6=-5x-16\Leftrightarrow 3x^2+17x+22=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{11}{3}\right)(x+2)=0.$$ Звідки $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{11}{3} \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Проте жоден з цих коренів не задовольняє умову (1).

$$x^2+4x+2=\frac{5x+16}{3}\Leftrightarrow 3x^2+12x+6=5x+16\Leftrightarrow 3x^2+7x-10=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{10}{3}\right)(x-1)=0.$$ Звідки $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{10}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$. Проте лише $x=1$ задовольняє умову (1). Таким чином, єдиним коренем даного рівняння є $x=1$.

Відповідь: 1.

Розв'язання задач

Доповнення

$$\left|f(x)\right| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} D_f \\ D_g \\ g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D_f \\ D_g \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} D_f \\ D_g \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) = -g(x), \end{cases} \end{array}\right.$$

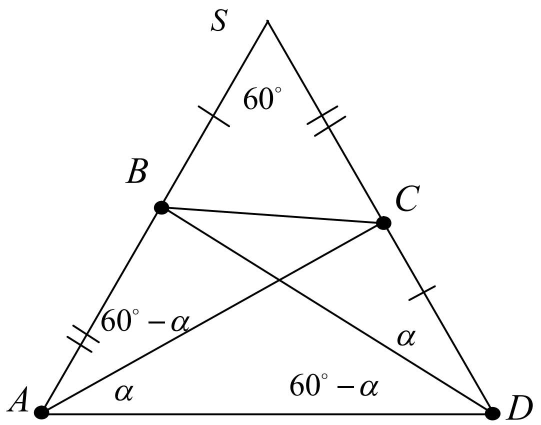
де D_f, D_g – область визначення функції $f(x)$ і $g(x)$ відповідно.

Задача №3

Нехай $ABCD$ – даний (опуклий) чотирикутник, в якому $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, $\angle CAD = \angle CDB = \alpha$. Доведемо, що $AB + CD = AD$.

І спосіб

Продовжимо протилежні сторони AB і CD до перетину у точці S.



Оскільки за умовою $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, то трикутник ADS є правильним. Звідки $AS = SD = AD$.

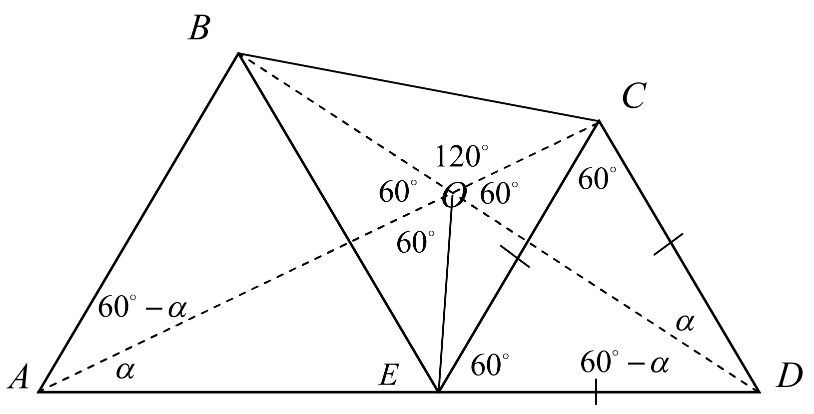
Розглянемо трикутники ADC і DSB: оскільки $AD = DS$, $\angle CAD = \angle BDS = \alpha$, $\angle ADC = \angle DSB = 60°$, то $\triangle ADC = \triangle DSB$ за стороною і прилеглими кутами.

І тому $DC = SB$, $AC = DB$.

Оскільки $AS = SD$ і $BS = CD$, то $AS - BS = SD - CD$. Звідки $AB = SC$. Оскільки $AD = AS$, то $AD = AB + BS = AB + CD$. Крім того, $AC = BD$.

ІІ спосіб

Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій AB до перетину з AD в точці E. Оскільки $\angle BAD = 60°$, то $\angle CED = 60°$.



І тому трикутник CED є правильним.

Звідки $ED = CD$.

Доведемо, що $AE = AB$.

Для цього достатньо показати, що $\angle ABE = 60°$.

1) Розглянемо трикутники AOD і AEC. Вони є подібними за двома кутами. Тому $\dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$.

2) Розглянемо трикутники OAE і DAC:

оскільки $\angle OAE = \angle DAC$ і $\dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$, то трикутники OAE і DAC є подібними.

Звідки $\angle AOE = \angle ADC = 60^\circ$.

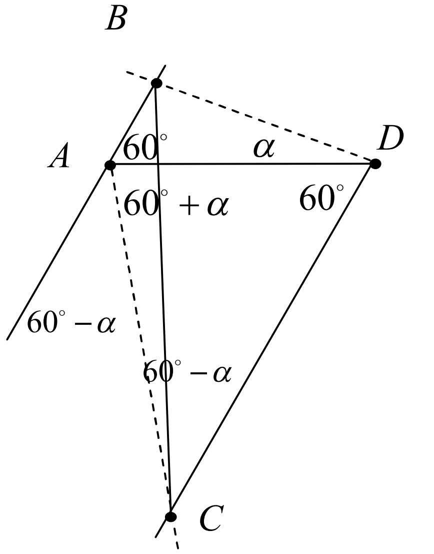
3) Оскільки $\angle BAE + \angle BOE = 180^\circ$, то навколо чотирикутника $ABOE$ можна описати коло. Але ж тоді $\angle BEA = \angle BOA = 60^\circ$, як кути, що спираються на одну хорду AB. Таким чином трикутник ABE є правильним. Звідки $AE = AB$.

Отже $AD = AE + ED = AB + CD$. Крім того, з точки O перетину діагоналей такого чотирикутника відрізки BE, EC і BC видно під кутом 120°.

Зауваження

В умові наведеної задачі не було окремо зазначено, що чотирикутник є опуклим. Оскільки в шкільному курсі геометрії вивчають виключно опуклі фігури, то вказане обмеження вважається природнім.

Проте, дотримуючись математичної строгості, дану задачу слід розв’язувати для двох суттєво різних випадків – коли даний чотирикутник є опуклим, або ні.



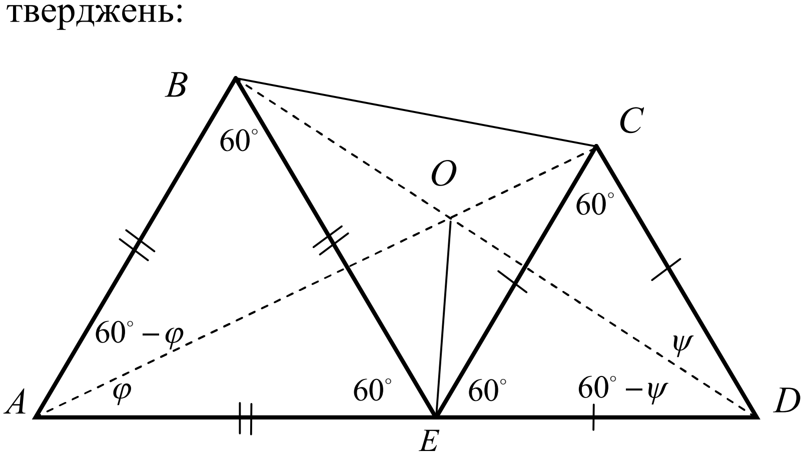
Нагадаємо, що многокутник (на площині) називають опуклим, якщо він розташовується в одній півплощині відносно кожної прямої, що містить сторону многокутника. В іншому випадку многокутник називають не опуклим.

На рисунку ліворуч наведено приклад не опуклого чотирикутника $ABCD$, який задовольняє умову задачі ($\angle BAD=\angle CDA=60°$, $\angle CAD=\angle CDB=\alpha$).

Проте рівність $AB+DC=AD$, яка була вірною для випадку опуклого чотирикутника, для випадку не опуклого чотирикутника не справджується. Справедливість останньої тези випливає з нерівності трикутника для сторін трикутника ACD.

<u>Доповнення</u>

Нехай в одну з півплощин відносно певної прямої l відкладено (побудовано) два (в загальному випадку) нерівних правильних трикутника ABE і ECD, при чому $A,E,D\in l$. Доведіть справедливість наступних тверджень:



1) $\angle CAD=\angle BDC$;

2) $AB+DC=AD$;

3) $AC=BD$;

4) $\angle EOB=\angle BOC=$
$=\angle COE=120^\circ$,
тобто O є точкою Торричеллі для $\triangle BEC$;

5) доведіть, що O є точкою (Ферма), сума відстаней якої до вершин трикутника BEC є мінімальною.

Задача №4

I спосіб

За умовою дискримінант $D = p^2 - 4q$ квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним.

З'ясуємо, скільки коренів може мати рівняння

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0. \qquad (10.4)$$

Розглянемо ліву частину рівняння (10.4)

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = x^2 + px + q + \left(x + \sqrt{D}\right)^2 + p\left(x + \sqrt{D}\right) + q =$$

$$= 2x^2 + 2x\left(p + \sqrt{D}\right) + D + p\sqrt{D} + 2q.$$

Тоді дискримінант D^* квадратного рівняння (10.4) дорівнює

$$D^* = 4\left(p + \sqrt{D}\right)^2 - 8\left(D + p\sqrt{D} + 2q\right) = 4p^2 + 8p\sqrt{D} + 4D - 8D - 8p\sqrt{D} - 16q =$$

$$= 4p^2 - 4D - 16q = 4\left(p^2 - 4q\right) - 4D = 4D - 4D = 0.$$

Оскільки $D^* = 0$, то рівняння (10.4) має два рівні корені

$$x_1 = x_2 = \frac{-2\left(p + \sqrt{D}\right)}{4} = -\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Отже, за умови, що дискримінант квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним, рівняння $P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0$ завжди має один дійсний корінь $x = -\dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ (кратності два).

II спосіб

Оскільки дискримінант $D = p^2 - 4q$ квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним, то $P(x)$ можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – дійсні різні числа, які є коренями відповідного квадратного рівняння $P(x) = 0$.

Заради визначеності будемо вважати, що $x_2 > x_1$. Тоді очевидно, що $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Тому квадратичний тричлен $P\left(x + \sqrt{D}\right)$ можна подати у вигляді

$$P\left(x + \sqrt{D}\right) = (x + x_2 - x_1 - x_1)(x + x_2 - x_1 - x_2) = (x + x_2 - 2x_1)(x - x_1).$$

Тоді тричлен $Q(x) = P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right)$ набуває виду

$Q(x) = (x - x_2)(x - x_1) + (x + x_2 - 2x_1)(x - x_1) = (x - x_2 + x + x_2 - 2x_1)(x - x_1) =$
$= 2(x - x_1)(x - x_1) = 2(x - x_1)^2$. І тому квадратне рівняння $P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0$ має єдиний (два рівних) корінь.

Розв'язання задач

Задача №5

За умовою задачі числа 1, 2, 3, …, 25 розташовують у квадратній таблиці 5×5 так, щоб у кожному (i-му) рядку числа (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) були розташовані у порядку зростання ($a_i < b_i < c_i < d_i < e_i$). Позначимо через S найменше значення суми чисел ($c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$), що стоять у третьому стовпці такої таблиці.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5

1	2	**3**	**…**	**…**
4	5	**6**	**…**	**…**
7	8	**9**	**…**	**…**
10	11	**12**	**…**	**…**
13	14	**15**	**…**	**…**

…	**…**	**11**	**12**	**13**
…	**…**	**14**	**15**	**16**
…	**…**	**17**	**18**	**19**
…	**…**	**20**	**21**	**22**
…	**…**	**23**	**24**	**25**

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 1 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 3, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 1 і 2 меншими за 3.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 4 до 25, що залишилися), яке можна поставити третім у певному рядку є число 6, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 4 і 5 меншими за 6.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 7 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 9, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 7 і 8 меншими за 9.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 10 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 12, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 10 і 11 меншими за 12.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 13 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 15, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 13 і 14 меншими за 15.

Оскільки на кожному кроці заповнення таблиці (дотримуючись вказаного за умовою задачі способу) для третіх позицій кожного рядка обиралося найменше з можливих, то найменшим значенням суми чисел у третьому стовпчику (всієї таблиці) є сума вказаних вище чисел 3, 6, 9, 12 і 15.

Таким чином, $S = (3+6+9+12+15) = 45$.

Відповідь: найменше значення суми чисел у третьому стовпчику становить 45.

Доповнення

!? Провівши міркування «з точністю до навпаки» доведіть, що найбільше значення суми чисел у третьому стовпчику становить 85.

!? Дослідіть, чи кожне з чисел від 45 до 85 може бути сумою чисел третього стовпця при заповнені таблиці у вказаний спосіб.

11 клас

Задача №1

За умовою функція $f(x)$ має вид $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі дійсні числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$.

Оскільки $f(0) = \dfrac{b}{d} = 1$, то $d = b$, і тому $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}.$$

Оскільки $f(1) = \dfrac{a+b}{c+b} = 0$, то $b = -a$, і тому $f(x)$ має вид

$$f(x) = \frac{ax-a}{cx-a}.$$

Аналогічно, з умови $f(2) = \dfrac{2a-a}{2c-a} = 3$ маємо $a = 6c - 3a$. Звідки $c = \dfrac{2}{3}a$.

І тому функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{ax-a}{\frac{2}{3}ax-a} = \frac{\cancel{a}(x-1)}{\cancel{a}\left(\frac{2}{3}x-1\right)} = \frac{x-1}{\frac{2}{3}x-1} = \frac{3(x-1)}{2x-3}.$$

Розв'язання задач

При заданих умовах, a не може дорівнювати нулеві. Дійсно, з припущення про обернене, одержимо наступні умови $1=\frac{b}{d}$, $0=\frac{b}{c+d}$, $3=\frac{b}{3c+d}$, які одночасно не можуть виконуватись. Таким чином, $f(3)=\frac{3(3-1)}{2\cdot3-3}=\frac{\cancel{3}\cdot2}{\cancel{3}}=2$.

Відповідь: 2.

<u>**Доповнення**</u>

Не важко бачити, що задана функція $f(x)$ є такою, що мають місце рівності: $f(f(0))=0$; $f(f(1))=1$; $f(f(2))=2$; $f(f(3))=3$.

1) Покажіть, що для кожного $x\neq\frac{3}{2}$ справджується рівність $f(f(x))=x$.

2) Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти a, b, c і d, щоб функція $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ мала таку саму властивість, тобто: щоб для кожного $x\neq-\frac{d}{c}$ справджувалась рівність $f(f(x))=x$.

Задача №2

<u>**І спосіб**</u>

Оскільки для довільного дійсного x має місце тотожність $\cos2x=2\cos^2x-1$, то $\left|\frac{\cos2x+3}{\cos x}\right|=\left|\frac{2\cos^2x-1+3}{\cos x}\right|=$

$$=\left|\frac{2\cos^2x+2}{\cos x}\right|=2\cdot\left|\frac{\cos^2x+1}{\cos x}\right|=2\cdot\left|\cos x+\frac{1}{\cos x}\right|=2\left(\left|\cos x\right|+\frac{1}{\left|\cos x\right|}\right). \qquad (11.2)$$

Покажемо, що $\forall x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ справджується нерівність $\left|\cos x\right|+\frac{1}{\left|\cos x\right|}\geq2$. Оскільки $\cos x\neq0$, то

$$\left|\cos x\right|+\frac{1}{\left|\cos x\right|}\geq2\Leftrightarrow\left|\cos x\right|^2-2\left|\cos x\right|+1\geq0\Leftrightarrow\left(\left|\cos x\right|-1\right)^2\geq0.$$

Оскільки справедливість останньої нерівності $\left(\left|\cos x\right|-1\right)^2\geq0$ не викликає сумнівів, то, з урахуванням нерівності (11.2), маємо справедливість даної нерівності $\left|\frac{\cos2x+3}{\cos x}\right|\geq4$, коли $\cos x\neq0$.

ІІ спосіб

Оскільки $\cos x \neq 0$, то нерівність $\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right| \geq 4$ рівносильна нерівності

$$\left|\cos 2x+3\right| \geq 4\left|\cos x\right|. \qquad (11.2.1)$$

Тоді очевидно, що зі справедливості нерівності (11.2.1) коли $\cos x \neq 0$ буде випливати справедливість даної нерівності. В свою чергу, справедливість нерівності (11.2.1) випливає зі справедливості нерівності

$$\left(\cos 2x+3\right)^2 \geq \left(4\cos x\right)^2, \text{ або ж } \left(\cos 2x-4\cos x+3\right)\left(\cos 2x+4\cos x+3\right) \geq 0.$$

Оскільки $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\left(2\cos^2 x-4\cos x+2\right)\left(2\cos^2 x+4\cos x+2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-2\cos x+1\right)\left(\cos^2 x+2\cos x+1\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow \left(\cos x-1\right)^2 \cdot \left(\cos x+1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-1\right)^2 \geq 0.$$

Очевидно, що $\forall x \in \mathbb{R}$ ліва частина останньої нерівності є невід'ємною, і, зокрема, обертається в нуль, лише коли $\cos^2 x = 1$ ($x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

Таким чином, доведено справедливість нестрогої нерівності $\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right| \geq 4$, коли $\cos x \neq 0$, рівність у якій досягається при $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ІІІ спосіб

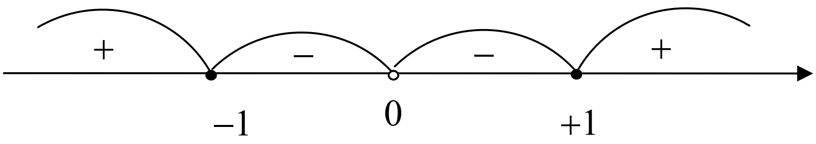
Позначимо $\cos x = t$, тоді $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$. Оскільки $t = \cos x$, то $-1 \leq t \leq 1$. Розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{2t^2+2}{t}. \qquad (11.2.2)$$

Дослідимо функцію $y = f\left(t\right)$ на монотонність та покажемо, що при всіх $t \in \left[-1;0\right) \cup \left(0;1\right]$ справджується нерівність $\left|f(t)\right| \geq 4$.

Отже, $$f'\left(t\right) = \frac{4t \cdot t - \left(2t^2+2\right) \cdot 1}{t^2} = \frac{2t^2-2}{t^2} = \frac{2\left(t+1\right)\left(t-1\right)}{t^2}.$$

Встановимо проміжки знакосталості функції $f'(t)$.



Оскільки $f'(t)<0$ на кожному з проміжків $(-1;0)$ і $(0;1)$, то функція $y=f(t)$ спадає на кожному з проміжків $(-1;0)$ і $(0;1)$.

Оскільки $f'(t)>0$ на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$, то функція $y=f(t)$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$.

Більше того, $x_{\max}=-1$; $x_{\min}=1$.

Оскільки $f(-1)=\dfrac{2(-1)^2+2}{-1}=-4$, а $f(1)=\dfrac{2(1)^2+2}{1}=4$, то з урахуванням проміжків монотонності:

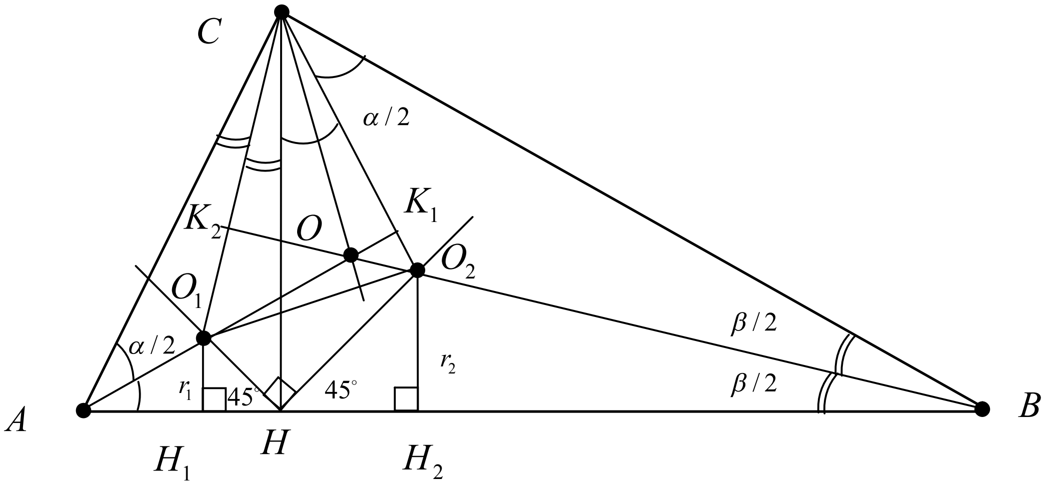
$f(t)\le -4$ для кожного $t\in[-1;0)$ і $f(t)\ge 4$ для кожного $t\in(0,1]$.

Але останнє й означає що при будь-якому $t\in[-1;0)\cup(0;1]$ справджується нерівність $|f(t)|\ge 4$.

Задача №3

Нехай CH – висота прямокутного трикутника ABC, яка проведена до гіпотенузи AB, а точки O_1, O_2 і O – є центрами кіл вписаних у трикутники ACH, BCH і ABC відповідно. Доведемо, що виконуються наступні умови:

1) $CO\perp O_1O_2$ і 2) $CO=O_1O_2$.



1) Доведемо спочатку, що прямі CO і O_1O_2 є перпендикулярними.

Для цього розглянемо $\triangle O_1CO_2$ і покажемо, що точка O є точкою перетину висот цього трикутника.

Отже, нехай бісектриса AO_1 кута A трикутника ACB перетинає сторону CO_2 трикутника O_1CO_2 у точці K_1. Тоді з трикутника AK_1C маємо, що
$\angle AK_1C = 180^0 - \angle CAK_1 - \angle ACK_1 = 180^0 - \angle CAK_1 - \left(\angle ACO + \angle OCK_1\right) =$
$= 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \left(45^0 + \left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 90^0.$ Тому O_1K_1 є висотою $\triangle O_1CO_2$.

Нехай далі бісектриса AO_2 кута B трикутника ACB перетинає сторону CO_1 трикутника O_1CO_2 у точці K_2. Тоді з трикутника BK_2C маємо, що
$\angle BK_2C = 180^0 - \angle CBK_2 - \angle BCK_2 = 180^0 - \angle CBK_2 - \left(\angle BCO + \angle OCK_2\right) =$
$= 180^0 - \frac{\beta}{2} - \left(45^0 + \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)\right) = 90^0.$ Тому O_2K_2 є висотою $\triangle O_1CO_2$.

Оскільки висоти O_1K_1 і O_2K_2 трикутника O_1CO_2 перетинаються у точці O, то пряма CO буде перпендикулярною стороні O_1O_2 цього трикутника.

2) Доведемо тепер справедливість рівності $CO = O_1O_2$.

__І спосіб__

Розглянемо трикутники OCB і O_2HB. Вони подібні за двома кутами, бо $\angle CBO = \angle HBO_2 = \frac{\beta}{2}$, $\angle OCB = \angle O_2HB = 45^0$. Тому $\frac{OC}{CB} = \frac{O_2H}{HB}$, звідки
$$O_2H = \frac{OC \cdot HB}{CB}.$$

З подібності трикутників COA і HO_1A (за двома кутами $\angle OAC = \angle O_1AH = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACO = \angle AHO_1 = 45^0$) маємо, що $\frac{OC}{AC} = \frac{O_1H}{AH}$, звідки
$$O_1H = \frac{AH \cdot OC}{AC}.$$

З прямокутного трикутника O_1HO_2 за теоремою Піфагора маємо
$$O_1O_2 = \sqrt{HO_2^2 + HO_1^2} = \sqrt{\frac{OC^2 \cdot HB^2}{CB^2} + \frac{AH^2 \cdot OC^2}{AC^2}} = OC \cdot \sqrt{\frac{HB^2}{CB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}} =$$
$$= OC \cdot \sqrt{\frac{HB^2}{AB \cdot BH} + \frac{AH^2}{AB \cdot AH}} = OC \cdot \sqrt{\frac{HB}{AB} + \frac{AH}{AB}} = OC \cdot \sqrt{\frac{AB}{AB}} = OC.$$
Отже, $CO = O_1O_2$.

<u>II спосіб</u>

Нехай H_1 і H_2 – основи перпендикулярів, опущених з центрів (O_1 і O_2) кіл, вписаних в трикутники ACH і BCH відповідно. Тоді довжини відрізків O_1H_1 і O_2H_2 є радіусами r_1 і r_2 кіл вписаних в трикутники ACH і BCH відповідно.

З рівнобедреного прямокутного $\triangle O_1H_1H$ маємо, що $O_1H = r_1\sqrt{2}$.

Аналогічно, з прямокутного $\triangle O_2H_2H$ маємо, що $O_2H = r_2\sqrt{2}$.

Оскільки відрізки HO_1 і HO_2 належать бісектрисам суміжних кутів CHA і CHB, то $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Тому з прямокутного $\triangle O_1HO_2$ за теоремою Піфагора маємо справедливість рівності $O_1O_2^2 = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Нехай далі r – радіус кола, вписаного в трикутник ACB. Оскільки точка O є центром цього кола (і належить бісектрисі прямого кута ACB), то $CO = r\sqrt{2}$, або ж $CO^2 = 2r^2$.

Покажемо тепер справедливість рівності $O_1O_2^2 = CO^2$.

Очевидно, що для цього достатньо довести справедливість рівності

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2. \qquad (11.3)$$

Зауважимо, що насправді, справедливість рівності (11.3) є наслідком узагальненої теореми Піфагора. Проте, доведемо цю рівність без використання вказаного твердження.

Для цього скористаємося подібністю прямокутних трикутників AHC, CHB та ACB (наприклад, за гострим кутом).

Очевидно, що $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ з коефіцієнтом подібності $k_1 = AC/AB$. Тоді: півпериметр p_1 трикутника AHC можна виразити через півпериметр p трикутника ACB наступним чином $p_1 = k_1 p = \dfrac{AC}{AB}p$, а площу S_1 трикутника AHC через площу S трикутника ACB як $S_1 = k_1^2 \cdot S_2 = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 \cdot S_2$.

Тому радіус r_1 кола вписаного у трикутник ACB (за відомою формулою)

можна подати у вигляді $$r_1 = \frac{S_1}{p_1} = \frac{\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \cdot S_2}{\frac{AC}{AB}p} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{S_2}{p} = \frac{AC}{AB} \cdot r. \qquad (11.3.1)$$

З подібності $\triangle CHB$ та $\triangle ACB$ випливає справедливість аналогічної

рівності $$r_2 = \frac{BC}{AB} \cdot r. \qquad (11.3.2)$$

Зі співвідношень (11.3.1) та (11.3.2) маємо наступну рівність

$$r_1^2 + r_2^2 = \left(\frac{AC}{AB} \cdot r\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB} \cdot r\right)^2 = \left(\frac{AC^2 + BC^2}{AB^2}\right) \cdot r^2 = r^2.$$

Таким чином, оскільки $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, то $CO^2 = 2r^2 = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) = O_1O_2^2$. Звідки $CO = O_1O_2$.

Доповнення

Нехай CH – висота прямокутного трикутника опущена на гіпотенузу. І нехай f_b, f_a, f_c – відповідні лінійні елементи (ті, що вимірюються в одиницях довжини) в подібних трикутниках AHC, CHB і ACB.

Доведіть (**узагальнену теорему Піфагора**), що має місце рівність $f_a^{\,2} + f_b^{\,2} = f_c^{\,2}$, та поясніть, чому теорема Піфагора є наслідком з цього твердження.

Задача №4

І спосіб

Оскільки $x_n = n^2 + 2007an + 2006a^2 = \left(n + 2006a\right)\left(n + a\right)\ \forall n \in \mathbb{N}$, то

$$x_{n+1} = \left(n + 1 + 2006a\right)\left(n + 1 + a\right).$$

З того що $a, n \in \mathbb{N}$, маємо:

1) $\left(n + 2006a\right), \left(n + a\right), \left(n + 2006a + 1\right), \left(n + a + 1\right) \in \mathbb{N}$;

2) НСД$\left(n + 2006a; n + 2006a + 1\right) = 1$, НСД$\left(n + a; n + a + 1\right) = 1$.

Розв'язання задач

Задача про існування натурального a, при якому кожні два сусідніх члени x_n і x_{n+1} (даної послідовності $\{x_n\}$ натуральних чисел) є взаємно простими, є рівносильною до задачі про існування натурального a, при якому кожен дріб $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ є нескоротним.

З урахуванням 2) дріб $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1+2006a)(n+1+a)}{(n+2006a)(n+a)}$ є нескоротним тоді і лише тоді, коли нескоротним є кожен з дробів $\frac{n+1+2006a}{n+a}$ і $\frac{n+1+a}{n+2006a}$. Очевидно, що для кожного натурального a, при $n = 2004a+1$ дріб $\frac{n+1+2006a}{n+a} = 2$ і є скоротним, а при $n = 2004a-2$ скоротним є дріб $\frac{n+1+a}{n+2006a} = \frac{1}{2}$.

Таким чином, для довільного натурального a члени послідовності $\{x_n\}$ з номерами $n = 2004a+1$, $n = 2004a+2$ або ж $n = 2004a-2$, $n = 2004a-1$ не є взаємно простими. Отже, вказаних натуральних a не існує.

<u>II спосіб</u>

Оскільки $x_n = x(n) = n^2 + 2007an + 2006a^2 = (n+a)(n+2006a)$, то

$$x_{n+1} = x(n+1) = (n+1)^2 + 2007a(n+1) + 2006a^2 =$$

$$= n^2 + (2007a+2)n + \left(2006a^2 + 2007a + 1\right).$$

Розглянемо послідовність натуральних чисел

$$y_n = x_{n+1} - x_n = 2n + 2007a + 1 = (n+a) + (n+2006a) + 1.$$

За алгоритмом Евкліда $\text{НСД}(x_{n+1}, x_n) = \text{НСД}(x_{n+1} - x_n, x_n) = \text{НСД}(y_n, x_n)$.

Припустимо, що існує натуральне a, при якому кожні два послідовні члени є взаємно простими. Тоді з умови

$$\text{НСД}(x_{n+1}, x_n) = \text{НСД}(y_n, x_n) = \text{НСД}\big(2n + 2007a + 1, (n+a)(n+2006a)\big) = 1$$

випливає, що для кожного натурального n справджуються рівності

$$\begin{cases}\text{НСД}\left(2n+2007a+1;n+a\right)=1\\ \text{НСД}\left(2n+2007a+1;n+2006a\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{НСД}\left(n+2006a+1;n+a\right)=1\\ \text{НСД}\left(n+a+1;n+2006a\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{НСД}\left(2005a+1;n+a\right)=1\\ \text{НСД}\left(n+a+1;n+2006a\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{НСД}\left(2005a+1;n+a\right)=1 & (1)\\ \text{НСД}\left(n+a+1;2005a-1\right)=1 & (2).\end{cases}$$

Проте,

при $n=2004a+1$ $\quad$ $\text{НСД}\left(2005a+1;n+a\right)=2005a+1\neq 1$, що суперечить (1);

при $n=2004a-2$ $\quad$ $\text{НСД}\left(n+a+1;2005a-1\right)=2005a-1\neq 1$, що суперечить (2).

Отже, прийшли до протиріччя. І тому вказаних натуральних a не існує.

Задача №5

Нехай a_1, a_2, …, a_{2006} – довжини сторін вказаних правильних трикутників. Тоді очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{2006} a_i = 100$.

Оскільки

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2+\left(a_1-a_2\right)^2+\left(a_1-a_3\right)^2+...+\left(a_1-a_n\right)^2+$$

$$+\left(a_2-a_3\right)^2+\left(a_2-a_4\right)^2+...+\left(a_2-a_n\right)^2+...+$$

$$+\left(a_{n-2}-a_{n-1}\right)^2+\left(a_{n-2}-a_n\right)^2+\left(a_{n-1}-a_n\right)^2=n\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right),$$

то $$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2\leq n\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right).$$

Звідки $$\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{n}\leq a_1^2+a_2^2+...+a_n^2. \qquad (3)$$

Таким чином, має місце нерівність

$\dfrac{(100)^2}{2006}=\dfrac{1}{2006}\left(\sum\limits_{i=1}^{2006}a_i\right)^2\leq\sum\limits_{i=1}^{2006}a_i^2$. Звідки $\dfrac{(100)^2}{2006}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\leq\sum\limits_{i=1}^{2006}\left(a_i^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\sum\limits_{i=1}^{2006}S_i$.

Очевидно, що $$\frac{(100)^2}{2006}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{10000}{2006}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2500\sqrt{3}}{2006}=\frac{1250\sqrt{3}}{1003}.$$

Крім того, оскільки $$\frac{1250\sqrt{3}}{1003}>2\Leftrightarrow 1250\sqrt{3}>2006\Leftrightarrow 625\sqrt{3}>1003\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(625\sqrt{3}\right)^2 > 1003^2 \Leftrightarrow 1171875 > 1006009 \text{, то} \qquad 2 < \sum_{i=1}^{2006} S_i .$$

З останньої числової нерівності випливає, що принаймні три з таких трикутників мають не порожній перетин. Отже, принаймні три трикутники мають спільну точку.

Зауваження. В діючих шкільних підручниках, починаючи з 2008 навчального року трикутник визначається як частина площини, границею якої є конструкція, що складається з трьох точок, що не належать одній прямій, та трьох відрізків, які сполучають ці точки (рис. 11.5.1). Тоді як до 2008 року трикутник визначали саме як каркасну модель – фігура, що складається з трьох точок, які не належать одній прямій, та трьох відрізків, що сполучають ці точки (рис. 11.5.2).

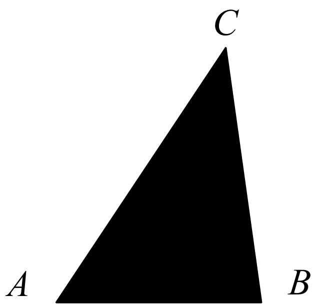


Рис. 11.5.1

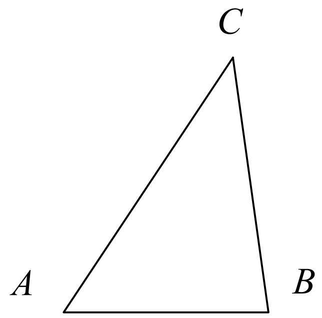


Рис. 11.5.2

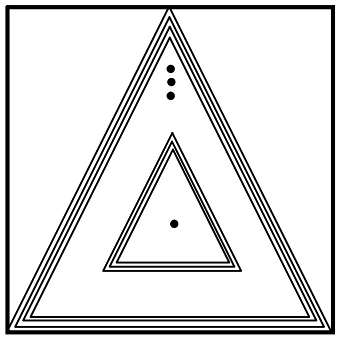


Рис. 11.5.3

У зв’язку з цим наведену задачу необхідно дослідити згідно «каркасного» визначення трикутника.

Насправді покажемо, що в цьому випадку твердження, про яке йдеться в умові задачі, в загальному випадку є невірним.

Наприклад, 2006 рівносторонніх трикутників (сумарного периметру 300 лін.од.) можна розмістити в квадраті зі стороною 1 (лін.од.) так, як показано на рис. 11.5.3.

<u>Доповнення</u>

Теорема (Нерівність Коші-Буняковського). При будь-яких значеннях $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

!? За допомогою нерівності Коші-Буняковського покажіть справедливість нерівності (3).

!? Доведіть нерівність Коші-Буняковського для початкових $n = 2;3$ (для довільного натурального n).

ДОДАТКИ:

УМОВИ ЗАВДАНЬ (ІІ ЕТАПІВ) ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ

1998 рік

7 клас

1. (15 б.) Для поїздки на футбольний матч вболівальникам клубу «Шахтар» було виділено 18 автобусів, причому в кожен автобус ввійшло на 5 чоловік більше, ніж посадочних місць. Якщо би вболівальники сідали в кожен автобус згідно посадочних місць, то знадобилося би ще три автобуси, проте в останньому були би 3 місця вільними. Скільки всього вболівальників їхало на матч?
2. (15 б.) Батько і син вирішили переміряти кроками відстань між двома деревами, для чого відійшли водночас від того ж самого дерева. Довжина кроку батька – 70 см, сина – 56 см. Знайти відстань між цими деревами, якщо відомо, що їхні сліди збіглися 10 разів.
3. (20 б.) Яке число слід відняти від чисельника дробу $\frac{52367}{47633}$ і додати до знаменника цього дробу, що б після скорочення одержати дріб $\frac{17}{83}$?
4. (20 б.) В прикладі на ділення деякі цифри замінили літерами (однаковим цифрам відповідають однакові літери): $ЧАЙ : АЙ = 5$. Визначити яка цифра відповідає кожній літері. Відповідь обґрунтуйте.
5. (30 б.) Для нумерації сторінок довідника знадобилося 2322 цифри. Скільки сторінок в довіднику?

8 клас

1. (15 б.) Доведіть, що вираз $(a-b)(a-b-6)+9$ є невід'ємним при довільних значеннях a і b.
2. (15 б.) По колу записано чотири числа так, що кожні з них дорівнює сумі трьох наступних за ним за годинниковою стрілкою. Доведіть, що всі ці числа рівні нулеві.
3. (20 б.) Знайти всі пари натуральних чисел, найбільший спільний дільник яких дорівнює 7, а найменше спільне кратне дорівнює 2010.
4. (20 б.) В трикутнику ABC кут $\angle A = 60^\circ$, а медіана BM дорівнює висоті CH. Знайти невідомі кути трикутника.
5. (30 б.) Є 9 (кг) крупи, чашкові терези та дві гирі 50 г і 200 г.

   a) Як зважити 2 кг крупи за три зважування?

   b) Чи можна зважити 2 кг крупи за три зважування, використовуючи тільки одну гирю в 200 г.?

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

9 клас

1. (15 б.) Двоє по черзі кладуть на круглий стіл п'ятаки (монети). Програє той, хто не зможе покласти наступний п'ятак (на вільне місце столу). Хто виграє при правильній грі (необхідній стратегії): той хто першим починає гру, чи його суперник? Відповідь обґрунтуйте.
2. (15 б.) Яке з чисел є більшим: $\sqrt{1997}+\sqrt{1999}$ чи $2\sqrt{1998}$?
3. (20 б.) $P(x)$ – многочлен четвертого степеня такий, що $P(1)=P(-1)$ і $P(2)=P(-2)$. Доведіть, що $P(x)=P(-x)$ для довільного $x\in\mathbb{R}$.
4. (20 б.) Дано трикутник ABC. Пряма, яка паралельна стороні AC, перетинає сторону AB в точці P, медіану AM – в точці T, а сторону BC – в точці K. Знайти довжину сторони AC, якщо $PT=3$ (см), $TK=5$ (см).
5. (30 б.) Розв'язати рівняння відносно x:
$$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)}-\frac{2kx}{(k-1)(x-2)}=\frac{5}{k^2-1}+\frac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}.$$

10 клас

1. (15 б.) Яких чисел більше серед перших 1000 натуральних чисел: тих, які діляться на 3 або 5, чи тих, які не діляться ні на 3, ні на 5? Відповідь обґрунтуйте.
2. (15 б.) Двоє по черзі ламають плитку шоколаду розміром 5×10. За один хід дозволяють зробити прямолінійний розлом буд-якого з кусків вздовж заглиблень. Виграє той, хто першим відломить дольку розміром 1×1. Хто виграє за умов правильної гри (стратегії): той хто почне першим чи другим? Відповідь обґрунтуйте.
3. (20 б.) При яких значеннях a многочлени $f(x)=x^5+ax^3+x+2$ і $g(x)=x^3+ax^2+2$ мають спільний корінь?
4. (20 б.) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x^3+y^3=1\\x^4+y^4=1\end{cases}$.
5. (30 б.) Опуклий чотирикутник є таким, що точка перетину бісектрис кутів DAC і DBC лежить на стороні CD. Доведіть, що точка перетину бісектрис куті в ADB і ACB лежить на стороні AB.

11 клас

1. (15 б.) Знайдіть суму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1997}+\sqrt{1998}}$.
2. (15 б.) Знайдіть найменше значення функції $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$.
3. (20 б.) Знайдіть всі пари (x,y) дійсних чисел, що задовольняють рівність $\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}$.
4. (20 б.) У восьми учнів в сумі є 7 грн. 19 коп. Відомо, що у кожних двох із них різна сума грошей. Проте у одного з них в ціле число разів грошей більше ніж у іншого. Скільки грошей у кожного учнів?
5. (30 б.) Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$ з кутом $\angle A=60^\circ$. Довжини всіх ребер призми дорівнюють 1. Точка F є серединою ребра DC, а точка M лежить на прямій A_1F. Визначити найменше значення суми площ трикутників MBB_1 і MCC_1.

1999 рік

6 клас

1. (15 б.) Іра, Вітя та Микола взяли по одній порції кожного із сортів морозива: фруктового, вершкового та шоколадного. Проте трьох порцій кожному виявилося замало. Тому Іринка взяла ще порцію фруктового, Вітя – вершкового, а Миколка – шоколадного. Розраховуючись вони заплатили: Іринка – 70 (коп.), Вітя – 80 (коп.), а Миколка – 90 (коп.). Скільки коштує порція кожного морозива?
2. (15 б.) На відрізку AB, довжина якого дорівнює 36 (см), відмітили точки K і M так, що $AK = 22$ (см), $BM = 23$ (см). У скільки разів відрізок MK менше відрізка AB?
3. (20 б.) В класі вчиться менше 50 учнів. За контрольну роботу $\frac{1}{7}$ учнів одержали «п'ятірки», $\frac{1}{3}$ – «четвірки», $\frac{1}{2}$ –«трійки». Інші учні одержали «двійки». Скільки було «двійок»?
4. (20 б.) Чи можуть троє людей, що мають двомісний мотоцикл, подолати відстань 60 (км) за три години, якщо швидкість пішохода 5 (км/год), а швидкість мотоцикла – 50 (км/год)?
5. (30 б.) За круглим столом сидять 12 чоловіків, деякі з яких завжди говорять тільки правду (назвемо їх лицарями), а решта завжди говорять неправду (назвемо їх брехунами). Кожен з тих, хто сидить за столом, проголосив: «Напроти мене сидить брехун». Скільки всього брехунів сидить за столом? Відповідь пояснити.

7 клас

1. (15 б.) Влітку на лижі знизили ціну на 10%, а взимку ціну підвищили на 10%. Порівняйте початкову та кінцеву ціну лиж.
2. (15 б.) Учні двох сьомих класів купили по однаковому числу підручників і заплатили за них 737 грн. Скільки було семикласників і скільки підручників купив кожен із них?
3. (20 б.) Яке число слід відняти від чисельника дробу $\frac{52367}{47633}$ і додати до знаменника цього дробу, що б після скорочення одержати дріб $\frac{17}{83}$?
4. (20 б.) Яна колі радіуса 1 відмічено 100 точок. Доведіть, що на цьому колі можна знайти таку точку, сума відстаней якої до всіх відмічених точок є більшою за 100.
5. (30 б.) Як сполучити 50 міст найменшим числом авіаліній так, що би з кожного міста можна було попасти в кожне інше місто, зробивши при цьому не більше двох пересадок?

8 клас

1. (15 б.) Розкласти на множники вираз $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.
2. (15 б.) Добуток 1997 цілих чисел дорівнює 1. Чи може їх сума дорівнювати нулеві?
3. (20 б.) В трикутнику ABC кут $\angle A = 60^\circ$, а медіана BM дорівнює висоті CH. Знайти невідомі кути трикутника.
4. (20 б.) Для додатних x, y і z виконується умови $\begin{cases} x+y+z=28 \\ 2x-y=32 \end{cases}$. Що більше x, чи y?
5. (30 б.) Доведіть, що серед 29 послідовних чисел обов'язково знайдеться таке, що у якого сума цифр ділиться на 11.

Умови завдань (II етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

9 клас

1. (15 б.) Чи вірно, що $3^{100}+7^{100}=8^{100}$?
2. (15 б.) Нехай a, b і c такі, що при кожному x виконується рівність $(x+a)^3=\frac{(x+b)^3+(x+c)^3}{2}$. Доведіть, що $a=b=c$.
3. (20 б.) Нехай a, b і c є додатними числами, для яких справджується рівність $a^2+b^2=c^2$. Доведіть, що можна побудувати трикутник зі сторонами a, b і c, який до того ж буде прямокутним.
4. (20 б.) Якщо добуток трьох чисел додатних чисел дорівнює 1, а їх сума строго більша за суму їх обернених величин, то рівно одне з них більше за 1. Доведіть.
5. (30 б.) Кожні два з n блоків комп'ютера сполучені дротом. Чи можна кожен з дротів пофарбувати в один із $n-1$ кольорів так, щоб із кожного блоку виходило $n-1$ дротів різного кольору? Розгляньте два випадки: $a)$ $n=6$; $b)$ $n=13$.

10 клас

1. (15 б.) В трикутнику ABC $AB=BC$, $\angle ABC=100^\circ$. На стороні AC обрано такі точки K і L, що $\angle KBA=\angle LBC=30^\circ$. Бісектриса $\angle CAB$ перетинає відрізок BK у точці P. Знайти величину $\angle KPL$.
2. (15 б.) При стрільбі по мішені спортсмен вибивав тільки по 8, 9 і 10 балів. Всього він зробив 11 пострілів і вибив 100 очок. Скільки пострілів зробив спортсмен і які були влучання?
3. (20 б.) Числа a, b, c і d такі, що при довільних значеннях x виконується рівність $3(x+a)^4=(x+b)^4+(x+c)^4+(x+d)^4$. Доведіть, що $a=b=c=d$.
4. (20 б.) Дана шахова дошка. Дозволяється фарбувати в альтернативний (протилежний) колір відразу всі клітинки якої–небудь горизонталі або вертикалі. Чи може при таких фарбуваннях (після декількох кроків) одержати шахову дошку, на якій точно одна чорна клітинка?
5. (30 б.) Сума декількох послідовних натуральних чисел дорівнює 1000. Знайти всі такі набори чисел.

11 клас

1. (15 б.) Функція $f(x)$ задовольняє при всіх значеннях x умову $f(x)=x\cdot f(1-x)+1$. Знайти цю функцію.
2. (15 б.) Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел $a_1,a_2,...,a_n$ справджується нерівність $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\ge a_1+a_2+...+a_n$.
3. (20 б.) Для гострих кутів α і β виконується рівність $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Знайдіть $\alpha+\beta$.
4. (20 б.) Висота трикутної піраміди $ABCD$, яка опущена з вершини D, проходить через точку перетину висот трикутника ABC. Крім того, $BD=b$, $CD=c$, $\angle BDC=90^\circ$. Знайти відношення площ граней ABD і ACD.
5. (30 б.) П'ять відрізків є такими, що з кожних трьох можна утворити трикутник. Доведіть, що хоча б один з трикутників є гострокутним.

2000 рік

7 клас

1. (15 б.) Дано відрізки довжиною 1,2,3 і 4 (лін.од.). Скільки різних трикутників можна скласти з них? (Дві або навіть три сторони трикутника можуть бути рівними)
2. (15 б.) У двох бочка було порівну води. Кількість води в першій бочці спочатку зменшилася на 10%, а потім збільшилася на 10%. Кількість води в другій бочці спочатку збільшилася на 10%, а потім зменшилася на 10%. В якій бочці води стало більше?
3. (20 б.) Учень номер дня свого народження помножив на 12, а порядковий номер місяця – на 31. Одержані добутки склав і в результаті одержав число 328. Якого числа і якого місяця народився учень.
4. (20 б.) У мішку знаходяться кульки двох кольорів – чорного і білого. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них було точно 3 кульки одного кольору?
5. (30 б.) Найбільший спільний дільник двох чисел, одне з яких складає $3/4$ від другого, дорівнює 27. Їх найменше спільне кратне дорівнює 324. Знайдіть ці числа.

8 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} a+b+c=9 \\ b+c+d=2 \\ c+d+a=1 \\ d+a+b=0. \end{cases}$
2. (20 б.) Обчислити суму $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+...+\frac{2}{1999\cdot 2001}$.
3. (20 б.) Знайти кути прямокутного трикутника, якщо відомо, що висота, яка проведена до гіпотенузи, в чотири рази менша за гіпотенузу.
4. (20 б.) Довести, що висоти (або ж прямі що їх містять) довільного трикутника, перетинаються в одній точці.
5. (30 б.) У бригаді 7 чоловік. Їх спільний (сумарний вік) становить 322 роки. Доведіть, що з них можна обрати трьох таких, сумарний вік яких був би менше 138 років.

9 клас

1. (15 б.) Обчислити різницю $\frac{1}{1+\sqrt{7-2\sqrt{4}}}-\frac{1}{1+\sqrt{7+2\sqrt{4}}}$.
2. (15 б.) Якщо кожні два з даних чисел є сумою двох квадратів, до їх добуток також є сумою двох квадратів цілих чисел. Доведіть це твердження.
3. (20 б.) Знайти кути і основу рівнобедреного трикутника з бічною стороною a, якщо відомо, що бісектриса кута ділить його на два рівнобедрених трикутника.
4. (20 б.) Побудувати трикутник за трьома медіанами.
5. (30 б.) Доведіть нерівність $\sqrt{99\cdot 100}+\sqrt{98\cdot 102}+...+\sqrt{2\cdot 98}+\sqrt{1\cdot 99}<\frac{1000\pi}{4}$.

10 клас

1. (15 б.) Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
2. (15 б.) Знайти суму чисел, яку можна одержати з числа 1234 всілякими перестановками його цифр.
3. (20 б.) Діагоналі рівнобокої трапеції $ABCD$ (AB – бічна сторона) перпендикулярні, O – центр описаного навколо $ABCD$ кола. Визначити $\angle AOB$.
4. (20 б.) Яку найбільшу площу може мати чотирикутник зі сторонами 1, 7, 11, 13?
5. (30 б.) Чи існують додатні числа a,b,c, для яких $a-b-c>0$ і $4bc-ab-ac>0$?

Умови завдань (II етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2001 рік

6 клас

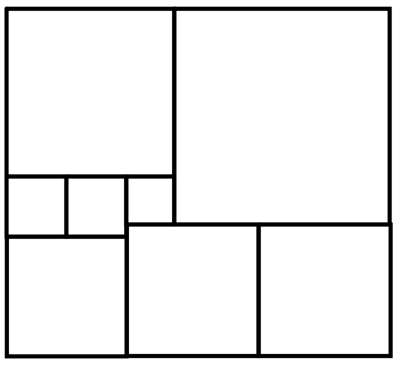
1. (15 б.) Чи можна у квадраті 4×4 розставити 10 мінусів так, щоб у кожному рядку було парне число мінусів, а у кожному стовбці – непарне число мінусів?
2. (20 б.) Віні–Пух, Сова, Кролик, П'ятачок з'їли 52 банани, причому кожному дісталося принаймні по 1 банану. Віні–Пух з'їв більше, ніж кожен з інших; Сова і Кролик разом з'їли 33 банани. Кролик з'їв бананів більше ніж Сова. Скільки бананів з'їв кожен з персонажів.
3. (20 б.) Юрко задумав натуральне число, помножив його на 13, закреслив останню цифру результату, потім одержане число помножив на 7. Знов закреслив останню цифру результату і одержав число 21. Яке число задумав Юрко?
4. (20 б.) Кожен з трьох учнів записує 100 слів, після чого записи порівнюють. Якщо слово зустрілося принаймні у двох учнів, то його викреслюють з усіх списків. Чи могло статися так, що у першого учня залишилося 54 слова, у другого – 75 слів, а у третього – 80 слів?
5. (25 б.) Розшифруйте два ребуси за двома діями, в яких однаковим літерам відповідають однакові цифри (в обох прикладах).

$$\begin{array}{r} +\,ABC \\ CC \\ \hline AAB \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \times\ ABC \\ CC \\ \hline +\ \ ABC \\ ABC \\ \hline ADAC \end{array}$$

Придумайте два ребуси та вкажіть відповіді.

7 клас

1. (15 б.) Вздовж забору ростуть 4 куща малини. Число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може на всіх кущах разом бути 125 ягід? Відповідь обґрунтуйте.
2. (15 б.) Як розрізати квадрат зі стороною 4 см на прямокутники, сума периметрів яких становить 25 см.?
3. (20 б.) На складі склотари можуть зберігати банки з–під консервованих овочів по 0,5 л., 0,7 л. і 1 л. Зараз на складі 2005 банок овочів, сумарного об'єму 1998 літрів. Доведіть, що на складі є хоча б одна півлітрова банка.
4. (20 б.) Прямокутник складений з квадратів так як зображено на рисунку. Сторона найменшого квадрату дорівнює 4. Які сторони у даного прямокутника?



5. (30 б.) Чи можна розташувати по колу натуральні числа від 1 до 10 так, щоб сума будь–яких двох чисел, що стоять через один, ділилася б на 3?

8 клас

1. (15 б.) У випуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$, $CD = DA$. Точки K, L, M, N є серединами сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $KLMN$ є рівними, тобто що $KM = LN$.
2. (15 б.) Що більше 127^{23} чи 513^{18}?
3. (20 б.) Скільки існує 11–значних чисел, що діляться на 9, у десятковому записі яких зустрічаються лише цифри 0 і 5?
4. (20 б.) Шашка стоїть у лівому нижньому куті шахової дошки розміром 4×4. За один хід вона може посунути на 1 клітинку по вертикалі або по горизонталі. Яких клітинок вона може досягнути, побувавши перед цим точно по одному разу на кожній з решти клітинок?
5. (30 б.) Чи існують натуральні числа a, b, c, що:

   а) $(a+b)(b+c)(c+a)=140$; б) $(a+b)(b+c)(c+a)=380$?

9 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть систему $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0. \end{cases}$
2. (15 б.) Дано два числа $A = 2^{100}\cdot3^{200}+2^{60}\cdot13^{30}$ і $B = 2^{60}\cdot43^{60}$. Чи вірно, що $A = B$?
3. (20 б.) На основі AC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) відмічено точку M. На продовжені AC за точку C відмічено точку N. Причому $AM = CN$. Доведіть, що $AB + BC < MB + BN$.
4. (20 б.) Побудуйте трикутник за стороною, прилеглому куту, та сумі двох інших сторін.
5. (30 б.) На дошці записані натуральні числа від 1 до 2001. Дозволяється замінити довільні два числа модулем їх різниці. Після 2001 таких операцій залишається 1 число. Чи може це число бути нулем?

10 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2-5x+2y^2-12=0 \\ 3x+xy-y^2-3y=0. \end{cases}$
2. (15 б.) Чи існують числа виду $66...6$, які є кубами цілих чисел?
3. (20 б.) В прямокутному трикутнику довжини медіани і висоти, проведені до гіпотенузи, дорівнюють m і h відповідно. Обчислити довжину бісектриси прямого кута цього трикутника.
4. (20 б.) Доведіть що корені рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$ при $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$ не перевищують за модулем числа 1.
5. (30 б.) Доведіть, що при всіх допустимих значеннях x, y буде вірною нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{y}{x}}\ge\frac{3}{2}$.

11 клас

1. (15 б.) Чи існують числа виду $22...2$, які є кубами цілих чисел?
2. (20 б.) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ суми квадратів протилежних сторін є рівними: $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ є перпендикулярними.
3. (20 б.) Розв'яжіть рівняння $x^4+2x^3-5x^2-2x+1=0$.
4. (20 б.) Доведіть, що число $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ є ірраціональним.
5. (30 б.) Визначте найбільше та найменше значення виразу $x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$, $|x|\le1$, $|y|\le1$.

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2002 рік

6 клас

1. (15 б.) Знайти найменше натуральне число, що не є розв'язком нерівності $15x < 460$.
2. (15 б.) Одна сторона трикутника дорівнює 20 см, друга сторона становить 80% від першої, а третя становить 75% від суми перших двох. Знайти периметр трикутника.
3. (20 б.) Які цифри можна підставити замість зірочок у запис тризначного числа $46*$ так, щоб одержане число ділилося на а) 2; б) 3; в) 5?
4. (20 б.) Яке найбільше число однакових подарків можна зробити з 320 горіхів, 240 цукерок та 200 пряників? Скільки горіхів, цукерок і пряників буде у кожному пакеті?
5. (30 б.) Кожне із шести міст з'єднані лінією повітряного безпересадочного сполучення. Скільки всього ліній повітряного сполучення?

7 клас

1. (15 б.) Обчислити значення виразу $\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4}$.
2. (15 б.) Із корзини взяли 3 яблука, потім третину від залишку, а потім ще 3 яблука. Після чого у корзині залишилася половина від початкового числа яблук. Скільки яблук було у корзині спочатку?
3. (20 б.) Знайти число, яке ділиться на 5 без залишку, а при ділені на 2, 3 і 4 дає в залишку 1.
4. (20 б.) Як розрізати прямокутник 4×6 на дві однакові частини і квадрат 1×1 на дві однакові частини так, щоб з чотирьох одержаних фігур можна було скласти квадрат 5×5?
5. (30 б.) На шаховій дошці у лівому верхньому куті стоїть король (поле $a8$). Двоє по черзі роблять ходи королем. Дозволяється переміщувати короля на одне поле праворуч, вниз або по діагоналі праворуч і вниз (наприклад, 1–ий хід $a8 \to b8$, або $a8 \to a7$, або $a8 \to b7$). Виграє той, хто поставить короля у правий нижній кут (на $h1$). Хто виграє при правильній грі: той, хто починає, чи ходить другим? Як переможець повинен грати?

8 клас

1. (15 б.) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = -1 \\ z + x = 8. \end{cases}$
2. (15 б.) В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM, пряма AK перетинає BC у точці L. Визначте відношення $BL : LC$.
3. (20 б.) Чи можна число $99...9$ (разом 2002 дев'ятки) подати у вигляді суми квадратів двох цілих чисел?
4. (20 б.) Книга містить 30 оповідань обсягом 3, 4, 5, … , 32 сторінки. Оповідання надруковані з першої сторінки. Кожне оповідання розпочинається з нової сторінки. Яке найбільше число оповідань може починатися з непарних сторінок?
5. (30 б.) У кожній клітинці таблиці 2002×2000 записано число 1, або число -1. Нехай p_k ($1 \le k \le 2002$) – добуток чисел у k – му стовбці, q_j ($1 \le j \le 2000$) – добуток чисел у j – му рядку. Чи може сума всіх p_k і q_j дорівнювати: а) 1; б) 0?

9 клас

1. (15 б.) Із пункту A в пункт B виїхали одночасно два мотоциклісти. Перший весь шлях їхав зі швидкістю 50 км/год, а другий – першу половину шляху їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу – зі швидкістю 40 км/год. Який з мотоциклістів прибув раніше у пункт B?
2. (15 б.) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 4|y| + 4 = 0 \\ y^2 - 4|x| + 4 = 0. \end{cases}$
3. (20 б.) В кут 60° вписано два кола, які дотикаються одне одного. Доведіть, що чотири точки дотику кіл зі сторонами кута є вершинами чотирикутника, у якого суми протилежних сторін є рівними.
4. (20 б.) Доведіть, що $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \le 1$, якщо $x > 0, y > 0, z > 0$, $x \cdot y \cdot z = 1$.
5. (30 б.) Чи можна число 33...3 (разом 2002 трійки) подати у вигляді суми квадратів двох цілих чисел?

10 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.
2. (15 б.) Доведіть, що трикутник з двома рівними медіанами є рівнобедреним.
3. (20 б.) Доведіть, що при кожному натуральному n число $2 \cdot 3^{6n} + 3 \cdot 2^{3n+1} - 1$ ділиться на 7.
4. (20 б.) Розв'яжіть функціональне рівняння $f(x \cdot y) + f(y \cdot z) + f(x \cdot z) = x \cdot y \cdot z$.
5. (30 б.) Знайдіть $\min\left(x + \sqrt{y} + \frac{1}{xy}\right)$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

11 клас

1. (15 б.) Із A в B та із B в A одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому залишилося пройти 24 км. А коли другий пройшов половину шляху, першому залишилося пройти 15 км. Яка відстань від A до B?
2. (15 б.) Визначте найбільше значення виразу $x_1x_2 + x_2x_3$, якщо $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.
3. (20 б.) У кожній клітинці таблиці 2002×2000 записано число 1, або число -1. Нехай p_k ($1 \le k \le 2002$) – добуток чисел у k – му стовбці, q_j ($1 \le j \le 2000$) – добуток чисел у j – му рядку. Чи може сума всіх p_k і q_j дорівнювати: а) 1; б) 0?
4. (20 б.) Прямокутний трикутник розташовано так, що його гіпотенуза лежить у площині α, а катети утворюють із цією площиною кути 45° і 30° відповідно. Знайдіть кут між площиною трикутника і площиною α.
5. (30 б.) Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, а рівняння $|P(x)| = 1$ має три цілі корені. Скільки цілих коренів може мати рівняння $P(x) = 0$?

Умови завдань (II етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2003 рік

7 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $|1-2x| = 3x-2$.
2. (15 б.) Електропотяг проїхав вздовж світлофора за 5 секунд, а вздовж платформи довжиною 150 м – за 15 секунд. Яка довжина електропотяга та його швидкість?
3. (20 б.) Кожну грань куба розрізали на чотири квадрати, і кожен з квадратів розфарбували в один з трьох кольорів: синій, жовтий або червоний так, щоб кожні два сусідніх (через сторону) квадрати були різного кольору. Доведіть, що синіх квадратів не менше восьми.
4. (20 б.) Знайдіть цілі x та y, що задовольняють рівнянню $x^2+2003=y^2$.
5. (30 б.) Розріжте прямокутник 9×16 на дві рівні частини, з яких можна скласти квадрат.

8 клас

1. Розкладіть на множники многочлен x^8+x^4-2.
2. При якому значені m прямі $y=-4x+m$ і $y=2x-3$ перетинаються на осі ординат (OY)?
3. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $xy-3x+5y=25$.
4. Точка D є серединою основи AC рівнобедреного трикутника ABC. Точка E – основа перпендикуляра, опущеного з точки D на сторону BC. Відрізки AE і BD перетинаються у точці F. Встановіть, який з відрізків є довшим: BF чи BE?
5. Доведіть нерівність $1-x+x^4-x^9+x^{16}-x^{25}+x^{36}-x^{49}+x^{64}-x^{81}+x^{100}>0$.

9 клас

1. (15 б.) Скоротіть дріб $\dfrac{8x^4+x}{16x^6+4x^4+x^2}$.
2. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.
3. (20 б.) Нехай $|x|<1$, $|y|<1$. Доведіть, що $|x-y|<|1-xy|$.
4. (20 б.) На столі лежить куча із 1001 камінців. З неї забирають один камінець і ділять кучу на дві кучі (не обов'язково рівні). Після чого з довільної кучі, що містить більше двох камінців, знову забирають камінець і ділять на дві кучі і так далі. Чи можна через декілька ходів залишити на столі лише кучі, що містять по три камінці?
5. (30 б.) У правильному трикутнику ABC обрали довільну точку M і опустили із неї перпендикуляри MA_1, MB_1 і MC_1 до сторін BC, AC і AB відповідно. Доведіть, що $A_1B+B_1C+C_1A=AB_1+BC_1+CA_1$.

10 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
2. (15 б.) Чи може найменше спільне кратне двох натуральних чисел дорівнювати їх сумі?
3. (20 б.) В трикутнику ABC кут при вершині C дорівнює 120°. Доведіть, що довжина відрізка, що сполучає цю вершину з центром вписаного кола, дорівнює $2(p-AB)$, де p – півпериметр трикутника ABC.

4. (20 б.) Дано квадратні тричлени $f(x)$ і $g(x)$, старші коефіцієнти яких дорівнюють 1. Відомо, що $f(x)+g(x)=0$ має два різні корені, а кожен з цих коренів є коренем рівняння $f(x)-(g(x))^3=0$. Доведіть, що $f(x)\equiv g(x)$.
5. (30 б.) В правильному п'ятикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5$ обрали точку M і опустили з неї перпендикуляри $MB_1, MB_2, MB_3, MB_4, MB_5$ на сторони A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 і A_5A_1 відповідно (всі основи перпендикулярів належать сторонам п'ятикутника, а не їх продовженням). Доведіть, що
$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 = A_2B_1 + A_3B_2 + A_4B_3 + A_5B_4 + A_1B_5.$$

11 клас

1. (15 б.) Для деяких цілих x і y число $3x+2y$ ділиться на 23. Доведіть, що число $17x+19y$ також ділиться на 23.
2. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-\cos 2x} = \sin 2x$.
3. (20 б.) Нехай $f(x)=x^4-3x^3+4x+5$. Знайдіть таке число a, при якому $|x-2|<a$ і виконується умова $|f(x)-f(2)|<\dfrac{1}{100}$.
4. (20 б.) Дана трапеція $ABCD$, $BC \parallel AD$. E і F є серединами сторін AB і CD відповідно. O – точка перетину діагоналей трапеції. Доведіть, що $EA^2 - EO^2 = FD^2 - FO^2$.
5. (30 б.) Знайдіть цілу частину числа $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{256}}$.

Умови завдань (II етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2004 рік

6 клас

1. Четверо друзів вирішили купити разом настільну гру. Перший вніс половину суми, внесеної іншими; другий – третину суми, внесеної іншими; третій – чверть суми, внесеної іншими, а четвертий вніс 1 гривню 30 копійок. Скільки коштує гра і скільки грошей вніс кожен?
2. Знайдіть суму натуральних чисел від 1 до 99.
3. Довести, що з будь–яких трьох натуральних чисел можна знайти два, сума яких ділиться на два.
4. Знайти найменше натуральне число, що не є розв'язком нерівності $15x < 460$.
5. У запису 88888888 поставте між деякими цифрами знак додавання (плюс) так, щоб одержати вираз, значення якого дорівнює 1000.

7 клас

1. Якщо деяке число збільшити на 15%, то одержимо 207. На скільки відсотків треба зменшити це число, щоб одержати 126?
2. Який дріб більше: $\frac{37}{67}$ або $\frac{377}{677}$?
3. Знайти найменше додатне число, яке при діленні на $2, 3, 5, 7$ і 11 дає в залишку 1
4. Серед точок прямої l знайти таку точку, сума відстаней від якої до двох даних точок M і N буде найменшою.
5. Квадрат числа складається з цифр $0; 2; 3; 5$. Знайдіть це число.

8 клас

1. Дмитрик і Вова вийшли одночасно з (одного) дому до школи. У Дмитрика крок був на 20% відсотків коротше ніж у Вови, але зате він встигав робити на 20% більше кроків за той самий час, ніж Вова. Хто з них прийшов раніш до школи?
2. Довести, що число $a^3 - a$ при будь–якому натуральному a ділиться на 6.
3. Знайти суму коефіцієнтів многочлена, отриманого при розкритті дужок і зведенні подібних членів у виразі $\left(x^2 - 3x + 3\right)^{2004}$.
4. Довести, що трикутник у якого центри описаного та вписаного кіл збігаються є рівностороннім.
5. Довести, що $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{100^2} < 0{,}99$.

9 клас

1. Знайти найменше ціле x що задовольняє нерівності $x \geq \frac{2005}{x}$.
2. Корені рівняння $x^2 + ax + 1 = b$ натуральні числа. Довести, що $a^2 + b^2$ складене число.
3. Довести, що многочлен $1 + x + x^2 + ... + x^{93} + x^{94} + x^{95}$ ділиться на многочлен $1 + x^{32} + x^{64}$.
4. Дано гострокутний трикутник ABC. Коло з центром на стороні BC проходить через вершини B і C та перетинає сторони AB і AC у точках D і E відповідно. Виявилося, що $AD = AE$. Довести, що трикутник ABC рівнобедрений.
5. Довжини сторін трикутника – послідовні цілі числа, не менше 3. Довести, що висота, яка опущена на середню за розміром сторону поділяє її на відрізки, різниця яких дорівнює 4.

10 клас

1. Розв'язати нерівність $\left(x^2-x-2\right)\cdot\sqrt{x^2-x}\geq 0$.
2. Відомо, що $(a+b+c)\cdot c<0$. Довести, що $b^2>4ac$.
3. В коло вписано прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB. На більшому з катетів BC взято точку D так, що $AC=BD$, а точка E – середина дуги AB, що містить точку C. Знайти кут DEC.
4. Чи існує таке число x, що значення виразів $x+\sqrt{2}$ та $x^3+\sqrt{2}$ – раціональні числа?
5. Довести, що якщо $2\leq x\leq 3,\quad 2\leq y\leq 3$, то $(3-x)^2+(3-y)^2+(x-y)^2\leq 2$.

11 клас

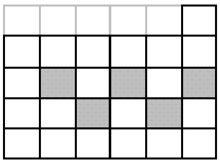
1. Дотична до графіка функції $y=x^2$ перетинає координатні вісі OX та OY у точках A і B так, що $OA=OB$. Знайти довжину відрізка AB.
2. Довести, що якщо $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$, то $x+y=0$.
3. Чи існує таке число x, що значення виразів $\operatorname{tg}x+\sqrt{3}$ та $\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}$ – цілі числа?
4. У трикутнику ABC з основою $AC=8$ проведено бісектрису BL. Площі трикутників ABL і BLC відносяться як $3:1$. Знайти бісектрису BL, при якій висота, що опущена з вершини B до основи AC, буде найбільшою.
5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+xz+yz=1. \end{cases}$

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2005 рік (міський)

6 клас

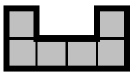
1. Вася розв'язав приклад на чернетці, а потім переписав розв'язання у зошит, але забув поставити дужки. У нього вийшло: $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2 = 40$. Розставте забуті дужки.
2. Наталка та Іна купили по однаковій коробці чаю в пакетиках. Відомо, що одного пакетика вистачає на дві або три чашки чаю. Наталці коробки вистачило тільки на 41 чашку чаю, а Іні – тільки на 58 чашок. Скільки пакетиків було в коробці?
3. В хороводі по колу стоять 15 діточок. Праворуч від кожної дівчинки стоїть хлопчик. У половини хлопчаків правий сусід також хлопчик, а у кожного з решти хлопчаків правий сусід – дівчинка. Скільки хлопчаків і скільки дівчинок в хороводі?
4. Розріжте фігуру (див. рис.) на 5 частин однакової форми і однакового розміру так, щоб в кожну частину попало рівно по одному сірому квадратику.



5. У місті Пряничному мер задумав ввести податок на пряники: кожен, хто купує пряник, повинен заплатити 20% від вартості пряника у міську казну. А заступник мера запропонував підняти ціну на пряники на 20% і забирати у казну 20% від виручки продавців. Яка з двох пропозицій (мера або його заступника) принесе в казну міста більше грошей?

7 клас

1. Тарган оголосив, що може бігати зі швидкістю 50 м/хв. Йому не повірили, і правильно: насправді тарган все переплутав і думав, що в метрі 60 сантиметрів, а в хвилині – 100 секунд. З якою швидкістю (в «нормальних» м/хв) бігає тарган?
2. При додаванні двох натуральних чисел Коля поставив зайвий нуль на кінці першого доданку і замість 2801 одержав суму, рівну 10001. Які числа додавав Коля?
3. В школі пройшли три олімпіади. З'ясувалось, що в кожній з них приймало участь по 50 учнів. Причому, 60 учнів приходило тільки на одну олімпіаду, а 30 учнів – рівно на дві. Скільки учнів прийняло участь у всіх трьох олімпіадах?
4. Незнайка розмістив без накладань в квадраті 10×10 тільки 13 фігур («дужок»), що зображені на рисунку нижче. Спробуйте розмістити більше.



5. В тирі гравець вносить у касу 100 рублів. Після кожного влучного пострілу кількість його грошей збільшується на 10%, а після кожного промаху зменшується на 10%. Чи могло через декілька пострілів у гравця виявитись 80 рублів 19 копійок?

8 клас

1. Касир продав всі білети в перший ряд кінотеатру, причому помилково на одне з місць було продано два білети. Сума номерів місць на всіх цих білетах становить 857. На яке місце продано два білети?
2. «Жигулі» і «Москвич» одночасно під'їхали до бензоколонки, що знаходиться на відстані 40 км по шосе від поста ДАІ. «Москвич» проїхав мимо цього поста на пів голини пізніше ніж «Жигулі». З якою швидкістю їхав «Москвич», якщо швидкість «Жигулів» – 80 км/год?
3. З трьох хлопчаків, яких звуть Антон, Іван і Сашко, тільки один завжди говорить правду. Антон сказав: «Іван не завжди говорить правду», Іван сказав: «Я не завжди говорю правду», а Сашко сказав: «Антон не завжди говорить правду». Хто з них завжди говорить правду, якщо відомо, що принаймні один з них сказав неправду?

4. В трикутнику ABC проведено медіану BD. Точки E і F ділять медіану на три рівних відрізки ($BE = EF = FD$). Відомо, що $AB = 1$, $AF = AD$. Знайти довжину відрізка CE.
5. На острові «Невезіння» з населенням 96 чоловік уряд вирішив провести п'ять реформ. Кожною реформою незадоволена рівно половина усіх громадян. Громадянин виходить на мітинг, якщо він незадоволений більше ніж половиною усіх реформ. Яке максимальне число людей уряд може очікувати на мітингу? Наведіть приклад і доведіть, що більше неможна.

9 клас

1. Щоб відкрити сейф, треба ввести код – число, що складається із семи цифр: двойок і трійок. Сейф відкриється, якщо двійок більше ніж трійок, а код ділиться і на 3, і на 4. Придумайте код, що відкриває сейф.
2. Чи можна у квадраті 10×10 розставити 12 кораблів розміром 1×4 (для гри типу «морський бій») так, щоб кораблі не дотикались один з одним (навіть вершинами)?
3. Два пішохода (одночасно) вийшли на світанку. Кожен йшов зі сталою швидкістю. Один йшов із A в B, інший – із B в A. Вони зустрілись опівдні і, не зупиняючись, продовжили рух. Один з них прийшов у пункт B о 16 годині, інший в A – о 21 годині. О котрій годині в той день був світанок?
4. Два торговці купили у місті однакову кількість товару по одній ціні та повезли кожен у своє поселення продавати. Перший продав товар в два рази дорожче закупочної ціни. Другий спочатку підняв ціну на 60%, продав четверту частину товару, потім підняв ціну ще на 40% і продав решту. Хто з них виручив більше грошей?
5. Двоє учнів по черзі виставляють на дошку 65×65 по одній шашці. При цьому в жодній лінії (горизонталі або вертикалі) не повинно бути більше двох шашок. Хто не зможе зробити хід – програє. Хто виграє при правильній грі та якою повинна бути стратегія?

10 клас

1. На острові 2/3 всіх чоловіків одружені та 3/5 всіх жінок є замужніми. Яка доля населення острову проживає у шлюбі?
2. Зад №4, 9 клас, 2005 рік.
3. Трикутник ABC є рівнобедреним. Причому $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 36^\circ$. Бісектриси AK і CM перетинаються у точці O. Знайдіть периметр трикутника AMO.
4. Нехай $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Розв'яжіть рівняння $f\Big(f\Big(f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big)\Big) = 0$.
5. Зад №5, 9 клас, 2005 рік.

11 клас

1. Додатні числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c$. Доведіть, що $a + b + c > 3abc$.
2. Доведіть, що існує квадрат, всі вершини та середини сторін якого належать гілкам гіперболи $y = \frac{1}{x}$. Знайдіть площу такого квадрата.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2y - x = \sin x - \sin 2y \\ \cos x + 5\sin y = 4. \end{cases}$
4. Зад №4, 10 клас, 2005 рік.
5. У круговому шаховому турнірі кожен учасник зіграв з кожним один раз. Назвемо партію неправильною, якщо переможець партії за результатами турніру набрав очок менше ніж переможений у цій партії (перемога дає 1 очко; нічия – 0,5; поразка – 0). Чи можуть неправильні партії складати
   а) більше 75% от загального числа партій у турнірі; б) більше 70%?

Умови завдань (II етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2005 рік

6 клас

1. (15 б.) Коли турист пройшов 1 *км* та половину решти шляху, то з'ясувалося, що до кінця ще $\frac{1}{3}$ всього шляху та ще 1 *км*. Знайдіть довжину всього шляху.
2. (15 б.) Житлова площа квартири з двох кімнат дорівнює 47,5 (кв.м.). Площа однієї кімнати складає $\frac{8}{11}$ площі іншої. Знайдіть площу кожної кімнати.
3. (20 б.) Знайти число, яке ділиться на 5 без остачі, а при діленні на 2, 3 і 4 дає в остачі 1.
4. (20 б.) Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників? Скільки цукерок, горіхів й пряників буде в кожному подарунку?
5. (30 б.) Маючи 8 кг квасолі та чашкові ваги без гирьок, зважте за їх допомогою 3 кг квасолі.

7 клас

1. (15 б.) Дано три точки $M(-2;3)$, $B(-2;6)$, $A(6;6)$. Побудуйте точку K, яка є вершиною прямокутника $MBAK$. Знайдіть площу цього прямокутника.
2. (15 б.) Число a становить 80% числа b, а число c складає 140% числа b. Знайдіть числа a,b,c, якщо c більше від a на 72.
3. (20 б.) Розв'яжіть рівняння $|1-2x| = 3x-2$.
4. (20 б.) У ести цифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга – з п'ятою, а третя – з шостою. Доведіть, що це число є кратним чисел 7, 11, 13.
5. (30 б.) Кожні два з шести міст сполучені лінією повітряного безпересадочного сполучення. Скільки всього ліній повітряного сполучення?

8 клас

1. (15 б.) Коли турист пройшов 1 *км* та половину решти шляху, то з'ясувалося, що до кінця ще $\frac{1}{3}$ всього шляху та ще 1 *км*. Знайдіть довжину всього шляху.
2. (15 б.) Що більше 5^{15} чи 3^{23}?
3. (20 б.) Розв'яжіть рівняння $\left|2|x-1|-3\right| = 5$.
4. (20 б.) Доведіть, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел обов'язково ділиться на 9.
5. (30 б.) Мережа метро має на кожній лінії не менше чотирьох станцій, з них не більше трьох – з пересадками. На кожній станції з пересадками не має перетинів більше ніж двох ліній. Яку найбільшу кількість ліній має така мережа, якщо з будь–якої станції на іншу можна потрапити, зробивши не більше двох пересадок?

9 клас

1. (15 б.) Доведіть рівність $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
2. (15 б.) Розкладіть многочлен $x^8 + x^4 - 2$ на множники.
3. (20 б.) Знайдіть два числа за їх різницею 66 та найменшим спільним кратним, що дорівнює 360.
4. (20 б.) Нехай BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC з кутом $\angle A = 30^\circ$. Точки B_2 і C_2 є серединами сторін AC і AB відповідно. Доведіть, що відрізки B_1C_2 і B_2C_1 є перпендикулярними.
5. (30 б.) За п'ять років навчання студент склав 31 екзамен, причому кожного року він складав більше екзаменів, ніж попереднього. На п'ятому курсі екзаменів було втричі більше ніж на першому. Скільки екзаменів було на четвертому курсі?

10 клас

1. (15 б.) Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ y + x = x^2 - 6 \end{cases}$?
2. (15 б.) На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC взяли точки M і N такі, що $AC = AM$ і $BC = BN$. Доведіть, що $\angle MCN = 45^\circ$.
3. (20 б.) Розв'яжіть рівняння $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$.
4. (20 б.) Доведіть, що коли a, b і c – довжини сторін даного трикутника, то при довільному значенні x виконується нерівність $b^2x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)x + c^2 > 0$.
5. (30 б.) Доведіть, що сума двох простих чисел ділиться на 12, якщо їх різниця дорівнює 2, а менше число більше від 3.

11 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть нерівність $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1$.
2. (15 б.) При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ буде найменшою?
3. (20 б.) Нехай a, b, c, d – довільні дійсні числа, сума яких дорівнює 1. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da \geq -\frac{1}{4}$.
4. (20 б.) У тетраедра $ABCD$ всі двогранні кути є гострими, а протилежні ребра попарно рівними. Знайдіть суму косинусів усіх двогранних кутів тетраедра.
5. (30 б.) На дошці записані числа: a, b, c, d. Кожну секунду вони змінюються на числа $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+a$. Через деякий час знову дістали початкові числа: a, b, c, d. Доведіть, що $a = b = c = d = 0$.

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2006 рік

6 клас

1. (5 б.) Одна зі сторін правильного трикутника дорівнює 20 см, друга сторона становить 80% від першої, а третя становить 75% від суми перших двох. Знайдіть периметр трикутника.
2. (5 б.) Знайдіть суму натуральних чисел від 1 до 999.
3. (10 б.) На пальмі сиділо багато мавп. Двадцять з них одержали сигнал. Мавпа, що одержує сигнал, зриває з пальми три фініки і роздає іншим. Мавпа, що одержала два фініки, з'їдає їх та передає (поштовхом) сигнал іншій мавпі. Після того, як відбулося 30 нових сигналів, мавпи заспокоїлися. Скільки фініків залишилося у мавп?
4. (10 б.) Над озерами летіли гуси. На кожному сідала половина гусей та ще пів гуся, решта летіли далі. В результаті всі гуси сіли на семи озерах. Скільки було гусей?
5. (15 б.) Кожен із чотирьох гномів – Беня, Веня ,Сеня і Женя – або завжди говорять правду, або ж завжди неправду. Мі підслухали таку розмову:

   БЕНЯ (Вені): Ти говориш неправду.
   ЖЕНЯ (Бені): Сам ти говориш неправду.
   СЕНЯ (Жені): Та обидва вони говорять неправду (подумав). І ти також.

   Хто з гномів говорить правду, а хто завжди говорить неправду?

7 клас

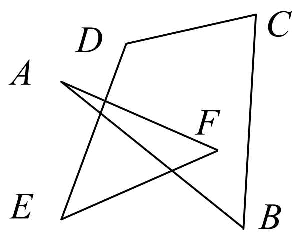
1. (5 б.) З корзини взяли 3 яблука, потім третину від залишку, а потім ще 3 яблука. Після цього в корзині залишилася половина від початкового числа яблук. Скільки яблук в корзині було спочатку?
2. (5 б.) Серед учнів 7 класу 12% хворіли грипом, а решта вболівали за ФК «Шахтар». Скільки учнів 7 класу вболівало за ФК «Шахтар», якщо у класі не більше 45 учнів?
3. (10 б.) На чудо–яблуні садівник виростив 25 бананів і 30 апельсинів. Кожен день він зриває два плода і водночас на яблуні виростає новий плід. Причому: якщо він зриває два однакових плода, то виростає апельсин, а якщо два різних – банан. Яким виявиться останній плід на дереві.
4. (10 б.) Парне число a при діленні на 3 дає залишок 1. Чому дорівнює залишок від ділення числа a на 6?
5. (15 б.) Серед 12 монет є одна фальшива. Знайти її за три зважування на шалькових терезах без гир, якщо відомо, що вона легша або важча за решту.

8 клас

1. (5 б.)

   а) Назвіть 10 перших натуральних чисел, що мають непарне число дільників (до дільників відносити одиницю і саме число);

   б) сформулюйте й доведіть правило, яке дозволяє знайти наступні такі числа.
2. (5 б.) Дана замкнена ломана лінія $ABCDEF$, для якої кути A, B, C, D, E рівні відповідно 20°, 25°, 60°, 130° і 75°. Знайти величину кута F.



3. (10 б.) Цілі числа a, b, c, d задовольняють співвідношенню $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$. Чи може добуток вказаних чисел дорівнювати 1000?

4. (10 б.) Доведіть, що

$$\frac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{1991}}}}}+\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{1991}}}}}}=1.$$

5. (15 б.) 12 кандидатів у мери розповідали про себе. Через деякий час один сказав: "До мене збрехали один раз". Другий сказав: "А тепер – двічі". "А тепер – тричі" – сказав третій, і так далі до 12–го, який сказав: "А тепер збрехали 12 раз". Тут ведучій перервав дискусію. Виявилося, що принаймні один кандидат правильно підрахував, скільки разів збрехали до нього. Скільки разів збрехали кандидати?

9 клас

1. (5 б.) Всі сторони многокутника мають довжину 1, а всі його кути дорівнюють 120° або 240°. Доведіть, що периметр такого многокутника є парним числом.
2. (5 б.) Знайти всі натуральні числа n, для яких дріб $\frac{19n+17}{7n+11}$ є цілим числом.
3. (10 б.) З ранку з двох поселень назустріч один одному одночасно вийшли два товариша. Кожен з них йшов у те поселення, з якого вийшов інший, і рухався зі сталою швидкістю без зупинок. Опівдні (о 12–00) товариші зустрілися, а до вечора досягли мети: один о 16–00, а інший о 21–00. В якому часу вони вийшли вранці.
4. (10 б.) При якому a система рівнянь $\begin{cases}2x+y=a\\ y+x^2=2005\end{cases}$ має єдиний розв'язок?
5. (15 б.) Дано не опуклий чотирикутник, який має три внутрішніх кута по 45°. Розглянемо фігуру, яка утворена відрізками, що сполучають середини його сторін.
   а) Доведіть, що ця фігура є прямокутником.
   б) Доведіть, що вона є квадратом.

10 клас

1. (5 б.) Знайти шестизначне число, яке починається з цифри 1 і таке, що при перестановці цієї цифри в кінець, одержимо число, яке втричі менше від шуканого.
2. (5 б.) Обчислити добуток $\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.
3. (10 б.) При яких значеннях параметра a нерівність $(a^2-1)\cdot x^2+2(a-1)\cdot x+2>0$ виконується при всіх дійсних значеннях x?
4. (10 б.) Побудувати графік функції $y=\cos x\cdot|\operatorname{tg} x|$.
5. (15 б.) Розв'язати в цілих числах рівняння $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$.

11 клас

1. (5 б.) Чи існує чотирикутна піраміда, у якої дві протилежні грані є перпендикулярними її основі?
2. (5 б.) Побудувати графік функції $y=\log_2\sqrt{|2\cdot|x|-4|}$.
3. (10 б.) Доведіть, що $x^{200}\cdot y^{200}+1$ не можна подати у вигляді добутку многочленів тільки від однієї змінно, тобто у вигляді $f(x)\cdot g(y)$.
4. (10 б.) Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x=2^{1+\frac{x}{4}}.$$

5. (15 б.) При яких a рівняння $a^2\cdot\cos\pi x-a(1+2x^2)-6=0$ має єдиний розв'язок.

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2007 рік

6 клас

1. (15 б.) Батько і син вирішили переміряти кроками відстань між двома деревами, для чого відійшли водночас від того ж самого дерева. Довжина кроку батька – 70 см, сина – 56 см. Знайти відстань між цими деревами, якщо відомо, що їхні сліди збіглися 10 разів.
2. (15 б.) Скільки води треба додати до 600 г рідини, що містить 40% солі, щоб вийшов 12% –й розчин цієї солі?
3. (20 б.) Довести, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.
4. (20 б.) На дошці записано число 23. Щохвилини число стирають з дошки і записують на його місце добуток його цифр, збільшений на 12. Що виявиться на дошці через годину?
5. (30 б.) У клітчатому квадраті 9×9 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть що, або знайдуться дві зафарбовані клітинки, що мають спільну сторону, або знайдеться не зафарбована клітинка, до сторін якої примикають не менше двох зафарбованих.

7 клас

1. (15 б.) Батон коштував $1{,}5$ грн. Ціна на нього підвищувалася 2 рази на 5% і на 6%, а потім знизилася відразу на 11%. Чи змінилася ціна батона в гривнях?
2. (15 б.) Скільки існує натуральних тризначних чисел, які при діленні на 8 дають остачу 3?
3. (20 б.) Зі 100 учнів ліцею 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську і німецьку, 10 – французьку і англійську, 5 учнів – німецьку і французьку, 3 – вивчають усі три мови. Скільки учнів вивчають лише англійську, лише французьку, лише німецьку? Скільки учнів не вивчають жодної мови?
4. (20 б.) Учню надіслали 20 задач. За кожну розв'язану задачу давали 8 балів; за неправильно розв'язану знімали 5 балів; за задачу, за розв'язання якої учень не брався, – 0 балів. Скільки задач спробував розв'язувати учень, якщо він набрав 13 балів?
5. (30 б.) При яких натуральних значеннях a рівняння $ax = a + x + 1$ має парні корені?

8 клас

1. (15 б.) Доведіть, що вираз $(a-b)(a-b-6)+9$ невід'ємний при будь–яких a і b.
2. (15 б.) У трикутнику ABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A.
3. (20 б.) Знайти, через скільки хвилин після того, як годинник показував 9 годин, хвилинна стрілка наздожене годинну?
4. (20 б.) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Довести, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
5. (30 б.) Довести, що в будь-якому шестидесятизначному числі, десятковий запис якого не містить нулів, можна закреслити кілька цифр так, що число, яке вийшло в результаті цього, буде поділятися на 1001.

9 клас

1. (15 б.) Знайти суму всіх коренів рівняння $x^2+3|x-1|-7=0$.
2. (15 б.) Розв'язати нерівність: $\frac{x^2+3x}{x}<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$.
3. (20 б.) Натуральні числа m та n такі, що $(4m-n)(n+m)=6m^2$. Довести, що n ділиться на m.
4. (20 б.) У трикутнику ABC бісектриса AE дорівнює відрізку EC. Знайти кути трикутника ABC, якщо $AC=2AB$.
5. (30 б.) У вершинах трикутника написані числа 1, 2 і 3. Потім кожне з чисел одночасно замінили на суму двох сусідніх. Цю операцію провели ще декілька разів. Чи може сума одержаних трьох чисел дорівнювати 3000000?

10 клас

1. (15 б.) При яких значеннях k рівняння $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$ має єдиний корінь?
2. (15 б.) Розв'язати нерівність: $(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x}\geq 0$.
3. (20 б.) Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$.
4. (20 б.) Точка M – середина сторони BC опуклого чотирикутника $ABCD$, $\angle AMD=120^0$. Довести, що $AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq AD$.
5. (30 б.) Прямокутник 7×11 розрізали на квадрати 2×2 та триклітинкові куточки (див. мал.). Скільки всього фігур одержали при розрізанні?

11 клас

1. (15 б.) Розв'язати рівняння: $\cos x\cdot\sqrt{2-x-x^2}=0$.
2. (15 б.) Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності: $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$.
3. (20 б.) Знайти найменше значення виразу $\frac{y}{x}$, якщо відомо, що $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.
4. (20 б.) Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E. Відомо, що площі трикутників ABE та DCE дорівнюють по 1, площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує 4, $AD=3$. Знайти BC.
5. (30 б.) В квадраті 1×1 відмітили 9 точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що знайдуться два трикутника з вершинами у цих точках, площі яких не перевищують $\frac{1}{8}$ для кожного.

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2008 рік

6 клас

1. (15 б.) Є два числа. Яке з чисел більше та на скільки, якщо 5% першого числа дорівнюють 15, а 8% від другого дорівнюють 16?
2. (15 б.) О 9 годині ранку зі станції A вирушив пасажирський поїзд, а слідом за ним об 11 годині з тієї ж станції вирушив швидкий поїзд. На якій відстані від станції A пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд, якщо швидкість пасажирського поїзда 54 км/год, а швидкого – 72 км/год?
3. (20 б.) Довести, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.
4. (20 б.) Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників? Скільки цукерок, горіхів й пряників буде в кожному подарунку?
5. (30 б.) По колу вписали 2003 натуральних числа. Доведіть, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких парна.

7 клас

1. (15 б.) Дано три точки $M(-2;3)$, $B(-2;6)$, $A(6;6)$. Побудуйте точку K, яка є вершиною прямокутника $MBAK$. Знайдіть площу цього прямокутника.
2. (15 б.) Білка за 20 хвилин приносить горіх до дупла. Яку відстань при цьому вона пробігає, якщо без горіха вона біжить зі швидкістю 5 м/с., а з горіхом 3 м/с.
3. (20 б.) Зі 100 учнів ліцею 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську і німецьку, 10 – французьку і англійську, 5 учнів – німецьку і французьку, 3 – вивчають усі три мови. Скільки учнів вивчають лише англійську, лише французьку, лише німецьку? Скільки учнів не вивчають жодної мови?
4. (20 б.) У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга – з п'ятою, а третя – з шостою. Доведіть, що це число кратне 7, 11 і 13.
5. (30 б.) На столі лежать 18 олівців. Двоє учнів по черзі беруть один, два або три олівці. Програє той, хто візьме останній олівець. Як повинен грати перший учень, щоб виграти?

8 клас

1. (15 б.) Коли турист пройшов 1 *км* та половину решти шляху, то з'ясувалося, що до кінця ще $\frac{1}{3}$ всього шляху та ще 1 *км*. Знайдіть довжину всього шляху.
2. (15 б.) У трикутнику ABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A.
3. (20 б.) Розв'яжіть рівняння: $\left|2|x-1|-3\right|=5$.
4. (20 б.) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Довести, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
5. (30 б.) На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

9 клас

1. (15 б.) Доведіть рівність: $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
2. (15 б.) Цілі числа a, b, c і d задовольняють умові $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$. Чи може добуток $abcd$ дорівнювати 1000?
3. (20 б.) Натуральні числа n та m такі, що $(4m-n)(n+m)=6m^2$. Довести, що n ділиться на m.
4. (20 б.) Нехай BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC з кутом A, що дорівнює 30^0, B_2 та C_2 – середини сторін AC та AB відповідно. Доведіть, що відрізки B_1C_2 та B_2C_1 перпендикулярні.
5. (30 б.) У нескінченному місті усі квартали – квадрати одного розміру. Велосипедист стартував з перехрестя вулиць. Через півхвилини за ним поїхав інший велосипедист. Кожен їде з постійною швидкістю 1 квартал у хвилину і на кожному перехресті вулиць повертає або направо, або наліво. Чи можуть вони зустрітися?

10 клас

1. (15 б.) Відомо, що $x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y$. Довести, що $x+y=1$.
2. (15 б.) На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC взяли точки M та N такі, що $AC=AM$ і $BC=BN$. Доведіть, що кут MCN дорівнює 45^0.
3. (20 б.) Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$
4. (20 б.) Дискримінант D квадратного тричлена $P(x)=x^2+px+q$ додатний. Скільки коренів може мати рівняння $P(x)+P\left(x+\sqrt{D}\right)=0$?
5. (30 б.) Числа 1, 2, 3, …, 25 розташовують у квадратній таблиці 5×5 так, щоб у кожному рядку числа були розміщені у порядку зростання. Яке найменше значення може мати сума чисел у третьому стовпчику?

11 клас

1. (15 б.) Функція $f(x)$ має вигляд $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чому дорівнює $f(3)$?
2. (15 б.) Довести, що якщо $\cos x\ne 0$, то $\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right|\ge 4$.
3. (20 б.) Відрізок CH – висота прямокутного трикутника ABC, яка проведена до гіпотенузи AB. Точки O_1, O_2 і O – є центрами вписаних кіл трикутників ACH, BCH і ABC відповідно. Довести, що $CO\perp O_1O_2$ і $CO=O_1O_2$.
4. (20 б.) Нехай a, b, c і d – довільні числа, сума яких дорівнює 1. Доведіть, що
$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\ge -\frac{1}{4}.$$
5. (30 б.) На дошці записані числа: a, b, c, d. Кожну секунду вони змінюються на числа $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+a$. Через деякий час знову дістали початкові числа: a, b, c, d. Доведіть, що $a=b=c=d=0$.

Умови завдань (ІІ етапів) Всеукраїнських олімпіад з математики

2009 рік

6 клас

1. (15 б.) Що більше 15% від числа 240, чи число, 75% якого дорівнює 27?
2. (15 б.) Учень прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. В третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги? Скільки сторінок у книзі?
3. (20 б.) Хлопчик і дівчинка виміряли кроками відстань 143 м, 20 разів їхні кроки збігалися. Крок хлопчика 65 см. Чому дорівнює довжина кроку дівчинки?
4. (20 б.) Щоб пронумерувати сторінки великої наукової роботи, знадобилось 3389 цифр. Скільки сторінок у роботі?
5. (30 б.) У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга з п'ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число кратне 7,11,13.

7 клас

1. (15 б.) Влітку ціну на лижі знизили на 10%, а взимку підняли на 10%. Порівняти ціну на лижі цією зимою та минулою (у відсотках)?
2. (15 б.) Кожний з трьох гравців записує сто слів, після цього записи порівнюються. Якщо слово зустрічається хоча б у двох, то його викреслюють зі всіх списків. Чи можлива ситуація, що у першого гравця залишилося 54 слова, у другого 75 слів, а у третього 80 слів?
3. (20 б.) Розмістити 6 точок на чотирьох прямих так, щоб на кожній з них було по три точки.
4. (20 б.) Знайти всі трійки простих чисел $a,\ b,\ c$ таких що $7a-bc=105$.
5. (30 б.) Шестицифрове число ділиться на 8. Яку найменшу суму цифр воно може мати? Яку найбільшу суму цифр може мати таке число?

8 клас

1. (15 б.) Через п'ять років вік брата буде відноситись до віку сестри як $8:7$. Скільки років кожному з них зараз, якщо рік тому брат був вдвічі старший від сестри?
2. (15 б.) Довести, що коли $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, де $a,\ b,\ c$ – дійсні числа, то $a=b=c$.
3. (20 б.) Точка P – середина висоти, яка проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC. Пряма BP перетинає бічну сторону AC у точці M. Доведіть, що $CM=2AM$.
4. (20 б.) На дошці записано число 12345678910111213…. Яка цифра буде стояти на 2009 місці?
5. (30 б.) Доведіть, що серед будь–яких ста цілих чисел, можна вибрати кілька (можливо, одне) різниця яких ділиться на 100.

9 клас

1. (15 б.) Обчислити значення виразу $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
2. (15 б.) При яких цілих значеннях a рівняння $x(a-1)^2=(a+4)(a-1)$ має цілі розв'язки?
3. (20 б.) Розкладіть на множники x^5+x+1.
4. (20 б.) У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC=BC$) провели медіану CC_1 і бісектрису AA_1. Знайдіть кут ACB, якщо $AA_1=2CC_1$.

5. (30 б.) В кожній клітині дошки 5×5 сидить жук. В деякий момент всі жуки переповзають на сусідні клітини (сусідніми вважаються ті, що мають спільну сторону). Доведіть, що після того як всі жуки переповзуть, знайдеться клітина, на якій сидітимуть принаймні два жуки.

10 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$.
2. (15 б.) При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2-ax+a-1=0$ буде найменшою?
3. (20 б.) Доведіть, що не існує чотирьох різних додатних чисел a,b,c,d таких, що $a+b=c+d$ та $a^3+b^3=c^3+d^3$.
4. (20 б.) Доведіть, що сума медіан трикутника менше периметра, але більше півпериметра трикутника.
5. (30 б.) В бібліотеці не більше 5000 книжок. Якщо їх зв'язувати по 6, по 7, по 5, то залишиться одна книга, якщо зв'язувати по 11, то зайвих книжок не буде. Скільки книжок в бібліотеці?

11 клас

1. (15 б.) Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$.
2. (15 б.) Розв'яжіть рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$.
3. (20 б.) Чому дорівнює сума дійсних коренів рівняння $f(x)=0$, якщо всі дійсні значення x задовольняють рівність $f(2x+1)=4x^2+14x$?
4. (20 б.) Доведіть, що на координатній площині не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати.
5. (30 б.) Дно прямокутної коробки викладено плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2×2. Замість неї дістали плитку розміром 1×4. Доведіть, що викласти тепер дно коробки не вдасться.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

З чого можна розпочати

1. Апостолова Г.В., Перші зустрічі з параметрами. – К.: Факт, **2004**.
2. Апостолова Г.В., Хитромудрий модуль. – К.: Факт, **2006**.
3. Апостолова Г.В., Ясінський В.В., Антьє і мантиса числа. – К.: Факт, **2006**.
4. Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П., Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ (ТУ), **2003**. – 224 с.
5. Березина Л. Ю., Графы и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, **1979**. – 143 с.
6. Бродский Я.С, Слипенко А.К., Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное изд–во, **1983**. – 96 с.
7. Виленкин Н. Я., Индукция. Комбинаторика: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, **1976**. – 48 с.
8. Галкин Е. В., Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учебное пособие для учащихся 7–11 кл. – Челябинск: Взгляд, **2005**. – 271 с.
9. Германович П.Ю., Сборник задач по математике на сообразительность: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, **1960**. – 224с.
10. Голубев В.И., Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М: ИЛЕКСА, **2007**. – 252 с.
11. Головина Л. И., Яглом И. М., Индукция в геометрии. – М., Физматгиз, **1961**. – 101 с.
12. Гончарова І. В., Скафа О.І., Евристики в геометрії: факультативний курс: Книга для вчителя. – Х.: Основа, **2004**.
13. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С., Задачи с параметрами. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», **1992**. – 290 с.
14. Дзигіна Л.Б., Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах. Математика в школах України: Науково–методичний журнал. – Основа, **2009**. – **№ 16/18.** – С. 76–89.
15. Екимова М.А., Кукин Г.П., Задачи на разрезание. - М.: МЦНМО, **2002**. – 122 с.
16. Канель–Белов А.Я., Ковальджи А.К., Как решают нестандартные задачи. Изд. 4–е, испр./ Под редакцией В.О. Бугаенко. - М.: МЦНМО, **2008**. – 96с.
17. Козко А.И., Чирский В.Г., Задачи с параметром и другие сложные задачи. – М.: МЦНМО, **2007**. – 296с.
18. Линдгрен Г., Занимательные задачи на разрезание. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. и с послесл.И, М. Яглома. - М., Мир, **1977**. - 256 с.
19. Летчиков А. В., Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями. – Издательство: Удмуртского университета, **1992**. – 108 с.
20. Ліпчевський Л.В., Остапчук У.В., Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей: Навчально – методичний посібник. – Біла Церква, КОІПОПК, **2004**.
21. Мельников О.И., Занимательные задачи по теории графов. – Минск: ТетраСистемс, **2001**. – 144 с.
22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Алгебра: Підручник для 8–х класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, **2008**.
23. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія: Підручник для 8–х класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, **2008**.
24. Петраков И.С., Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, **1982**. – 96 с.

25. Прасолов В.В., Задачи по планиметрии, в 2 ч. – М.: Наука, **1991**.
26. Репета В.К., Клешня Н.О., Коробова М.В., Репета Л.А., Задачі з параметрами. – К.: Вища школа, **2006**.
27. Седракян Н. М., Авоян А. М., Неравенства. Методы доказательства / Пер. с арм. Г. В. Григоряна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, **2002**. – 256 с.
28. Шаповалов А. В., Принцип узких мест. – М.: МЦНМО, **2006**. – 24 с.
29. Шень А., Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, **2007**. – 40 с.
30. Шень А., Математическая индукция. – 3–е изд., дополн. – М.: МЦНМО, **2007**. – 32 с.
31. Ясінський В., Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач. - **№ 1/2**. - Математика в школі: Науково–методичний журнал, **2009.** – С. 35–40.
32. Ясінський В., Наконечна Л., Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач. - **№ 9.** - Математика в школі: Науково–методичний журнал, **2009.** – С. 33–40.
33. Ясінський В.А., Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. – Х.: Основа, **2005**.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

34. Вышенский В.А., Карташев Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И., Сборник задач киевских математических олимпиад. - Киев, **1984**. – 240 с.
35. Вишенський В.А., Карташов М.В., Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр.: Збірник задач. – К.: Либідь, **1993**. – 144с.
36. Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Українські математичні олімпіади: Довідник. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
37. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Математичні олімпіади школярів України. 1991–2000. – К.: Техніка, **2003**. – 541 с.
38. Федак І. В., Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ. – Чернівці, **2003**.
39. Басанько А.М., Романенко А.О., За лаштунками підручника з математики: Збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів. – Тернопіль: Підручники і посібники, **2004**.
40. Коваль Т. В., 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи. – Тернопіль: Мандрівець, **2004.** – 80 с.
41. Лейфура В.М., Змагання юних математиків України. 2003 рік. – Х.: Основа, **2004**.
42. Ясінський В.А., Олімпіадні задачі. Випуск 1: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2004.** – 40 с.
43. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А., Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
44. Лось В.М., Тихієнко В.П., Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондор, **2005** – 312 с.
45. Сарана О.А., Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., **2005**. – 344 с.
46. Ясінський В.А., Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. –Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2005.** – 208 с.
47. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад: методический материал / В. А. Ясінський. – Х.: Основа, **2006**. – (Б–ка ж–лу «Математика в школах України»)
48. Готуємось до олімпіади з математики/ Упорядн. А. Б. Веліховська, О.В. Гримайло. – Х.: Основа, **2007**. – 160 с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2 (50)).
49. Вороний О. М., Готуємось до олімпіади з математики. Книга 1. – Х.: Основа, **2008**. – 128 с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 5 (65)).

50. Вороний О. М., Готуємось до олімпіади з математики. Книга 2. – Х.: Основа, **2008**. – 141, [3] с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 6 (66)).
51. Анікушин А. В., Арман А. Р., Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. – К.: Літера, **2008** – 135 с.
52. Анікушин А. В., Арман А. Р., Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. – К.: Літера, **2008** – 224 с.
53. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б.В. Всеукраїнські математичні бої – 2009. – Дніпропетровськ: Інновація, **2010** – 96 с.
54. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України 2007–2008 та 2008 – 2009. – Львів: Каменяр, **2010** – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

55. Агаханов Н. Х., Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006. Окружной и финальный этапы. – М.: МЦНМО, **2007**. – 468 с.
56. Агаханов Н. Х., Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, **2008**. – 192 с.
57. Агаханов Н. Х. и др Математика. Областные олимпиады. 8–11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, **2010**. – 239с.
58. Агаханов Н. Х., Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, **2009**. – 159 с.
59. Агаханов Н. Х., Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы / Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. – М.: Просвещение, **2010**. – 192 с.
60. Агаханов Н. Х., Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М.: Просвещение, **2010**. – 127 с.
61. Балаян Э. Н., 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3–е изд. – Ростов н/Д: Феникс, **2008**. – 364, [1] с.: ил. – (Библиотека учителя).
62. Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П., Потапова М. Г., Семёнов А. В., Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5–6 классов. Задания с решениями, технология проведения. – М.: МЦНМО, **2003**. – 128 с.
63. Болтянский В Г., Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. – М., Просвещение, **1965**. - 384 с.
64. Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов. – ОНТИ НКТП СССР, **1936**. - 82 с.
65. Вавилов В.В., Задачи отборочных математических олимпиад. – М.: МГУ, **1992**. – 61 с.
66. Галкин Е. В., Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учебное пособие для учащихся 7–11 кл. – Челябинск: Взгляд, **2004**. – 448 с.
67. Гальперин Г.А., Толпыго А.К., Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, **1986**. – 303с.
68. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, **1994**. – 272 с.
69. Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, **2005**. – 560 с.
70. Егоров А. А., Раббот Ж. М. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика. – М.: Бюро Квантум, **2006**. – (Библиотечка «Квант»)
71. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): Пособие для учителей 5–8 классов. Под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2–е, переработ. – М., Просвещение, **1971**. – 304 с.

72. Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, **2009**. – 488 с.
73. Московские математические регаты / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, **2007**. – 360 с.
74. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005–2008). — М.: Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ, **2008**. – 48 с.
75. Р. М. Федоров, А. Я. Канель–Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Ященко, Московские математические олимпиады 1993—2005 г./ Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, **2006**. – 456 с.
76. Севрюков П. Ф., Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / – Изд. 2–е. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, **2009**. – 112 с.
77. Спивак А. В., Тысяча и одна задача по математике. - М.: Просвещение, **2002.** – 208 с.
78. Фомин А. А., Кузнецова Г. М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады. – М.: Дрофа, **2006**. – 159 с.
79. Фомин Д. В., Санкт–Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, **1994**. - 309 с.
80. Ященко И. В., Приглашение на математический праздник. – М.: МЦНМО, **2005**. – 104 с.
81. Олимпиадные задания по математике. 9–11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / сост. В. А. Шеховцов. – Волгоград: Учитель, **2009**. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

82. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренок Ю. В., Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение: Учеб. лит., **1997**. – 208 с.
83. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, **1975**. – 112 с.
84. Бугулов Е. А., Толасов Б. А., Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. – Орджоникидзе, **1962**. – 226 с.
85. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, **1963**. – 53 с.
86. Васильев Н. Б., Гуттенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л., Заочные математические олимпиады. – 2–е изд. – М.: Наука, **1987**. – 176 с.
87. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, **1988**. – 288 с.
88. Петраков И. С., Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, **1982**. – 96 с.
89. Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник, Кишиневские математические олимпиады. – Кишинев: Штиинца, **1983**. - 76 с.
90. Савин А. П., Физико-математические олимпиады: Сборник. - М.: Знание, **1977**. - 160 с.
91. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю., Сборник олимпиадных задач по математике. Под ред. Ф.М. Шустеф. - Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, **1962**. - 84 с.

Рекомендована література

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

92. Берник В. И., Жук И. К., Мельников О. В., Сборник олимпиадных задач по математике. – Мн.: Нар. асвета, **1980**. – 144 с.
93. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, **1988**. – 288 с.
94. Зарубежные математические олимпиады /Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др.; Под ред. И. Н Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., **1987**. – (Б–ка мат. кружка). – 416 с.
95. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я., Венгерские математические олимпиады. Пер. с венг, Ю. А. Данилова. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М.: Мир, **1976**. – 543 с.
96. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Львів: Євро світ, **1999**. – 128 с.
97. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А., Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: Пособие для учащихся. – 4–е изд., испр. и доп. – М.: Просвещение, **1976**. – 288 с.
98. Страшевич С., Бровкин Е., Польские математические олимпиады. Предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля. Пер. с польск. Ю. А. Данилова под ред, В.М. Алексеева. - М.: Мир, **1978**. - 338 с.
99. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М.: Дрофа, **1998**. – 160 с.

Internet ресурси

1. http://matholymp.org.ua/ – **Київські олімпіади з математики** (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років);
2. http://kvant.mirror1.mccme.ru/ – **Фізико–математичний журнал «Квант»** (завдання різних математичних олімпіад за 1971–2002рр);
3. http://www.imo-official.org – **Сайт міжнародних олімпіад з математики**.
4. http://olimpiada.ru/ – Олимпиады для школьников;
5. math.rusolymp.ru/ – Всероссийская олимпиада по математике;
6. http://mathkang.ru/ – Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру»;
7. http://www.kangaroo.com.ua/index.php – Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру»;
8. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ – Московская математическая олимпиада школьников;
9. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp/ – Санкт–Петербургские математические олимпиады;
10. http://www.turgor.ru/ – Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников;
11. http://www.mccme.ru/ – Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования;
12. http://zaba.ru/, http://problems.ru/ – Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань).

ВИПУСКИ СЕРІЇ:
Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...

Номери випусків	Назва	Рік	Автори
Випуск 1	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007	**2008**	Беседін Б.Б., Бірюкова Г.М., Ганзера Г.О., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
Випуск 2	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008	**2009**	Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
Випуск 3	Моделювання сучасного уроку математики в школі	**2009**	Н.І. Труш, Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Л.Г. Плесканьова.
Випуск 4	Олімпіадні задачі з інформатики: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з інформатики 2007, 2008	**2009**	В.Є. Величко, М.М. Рубан, В.П. Батуніна, С.Є. Устінов
Випуск 5	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009	**2010**	Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
Випуск 6	Олімпіадні задачі з інформатики: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з інформатики 2009	**2010**	В.Є. Величко, М.М. Рубан, Є.М. Пірус, С.Є. Устінов
Випуск 7	Педагогічна практика студентів: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних вузів	**2010**	Н.І.Труш, Б.Б.Беседін, Р.В.Олійник, В.М.Рибєнцев, О.М.Сипченко. В.П.Саврасов, В.В.Волков.

Навчальне видання

Беседін Борис Борисович, **Кадубовський** Олександр Анатолійович, **Кадубовська** Валентина Миколаївна, **Сьомкін** Володимир Семенович, **Труш** Неля Іванівна, **Чуйко** Олена Вікторівна

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010

Випуск 8

Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних спеціальностей та вчителів математики

Відповідальний за випуск О.А. Кадубовський

Видавничий центр «Маторін»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДЦ №74, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 10.02.2004 р.

Підписано до друку 05.02.2011.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 3,5.
Зам. № . Тираж 100 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56

До уваги абітурієнтів

У 2011 році фізико-математичний факультет СДПУ оголошує прийом документів для вступу на перший курс для здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за наступними галузями (напрямами) підготовки

Галузі знань		Напрями підготовки		Ліцензовані обсяги	Нормативні терміни навчання	Вартість одного року навчання, грн. (станом на 01.09.2010)
Код	Назва	Код	Назва	Денна форма навчання		
0402	Фізико-математичні науки					
		6.040201	**Математика***	125	4 роки	3 300
		6.040203	**Фізика***	65	4 роки	3 300

Перелік конкурсних предметів у сертифікаті Українського центру оцінювання якості освіти (вступних екзаменів) для вступників на основі повної загальної середньої освіти

Напрями підготовки освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра			Перелік конкурсних предметів (вступних екзаменів)	Статус предмету	Мінімальна кількість балів для допуску до участі в конкурсі або зарахування на навчання поза конкурсом
Назва	Код	Квота пільгових категорій Встановлено відсотків			
Математика* ***Спеціалізація:*** **інформатика**	**6.040201**	**25%**	1. Українська мова та література		124
			2. Математика	Профільний	124
			3. Фізика *або* іноземна мова		124
Фізика* ***Спеціалізація:*** **інформатика**	**6.040203**	**25%**	1. Українська мова та література		124
			2. Фізика	Профільний	124
			3. Математика *або* хімія		124

Прийом заяв і документів, вступні екзамени, конкурсний відбір та зарахування на навчання вступників (на основі здобутої повної загальної середньої освіти) проводиться в такі строки

Етапи вступної компанії	Для вступників на основі повної загальної середньої освіти
Початок прийому заяв та документів	1 липня 2011 р.
Закінчення прийому заяв та документів від осіб, які мають складати вступні екзамени, що проводить СДПУ	22 липня 2011 р.
Закінчення прийому заяв та документів від осіб, які не складають вступних екзаменів і не проходять творчі конкурси	31 липня 2011 року
Строки проведення СДПУ вступних екзаменів	23 – 31 липня 2011 року
Термін оприлюднення рейтингового списку вступників	1 серпня 2011 року
Терміни зарахування вступників за державним замовленням – за кошти фізичних та юридичних осіб –	 8 серпня; 25 серпня

Контактна інформація

84116, Донецька область, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.

Приймальна ректора: (06262) 3-23-54

Приймальна комісія: (06262) 3-97-50

Деканат фізико-математичного факультету (06262) 3-26-59