Пілявська Т.В.

Доведення нерівностей у шкільному курсі математики

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ

ХМЕЛЬНИЦЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ ХМЕЛЬНИЦЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ

ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ЛІЦЕЙ № 17

РОЗГЛЯНУТО	СХВАЛЕНО
Науково-методичною радою управління	Вченою радою Хмельницького обласного
освіти	інституту післядипломної
Хмельницької міської ради	педагогічної освіти
Протокол № 4 від 29.09.2014	Протокол № _____від_________2014 р.
Завідувач НМЦ____________________	Ректор ХОІППО
_______________ _______Г.Думанська	___________________В. Берека

Доведення нерівностей в шкільному курсі математики

Автор: Пілявська Тетяна Володимирівна

вчитель математики,

Хмельницький ліцей №17

Хмельницький 2014

Автор: Т.В.Пілявська, вчитель математики вищої категорії, старший вчитель Хмельницького ліцею № 17.

Рецензенти:

А.В. Яровий, старший викладач кафедри прикладної математики та соціальної інформатики Хмельницького національного університету, кандидат економічних наук, вчитель математики Хмельницького ліцею № 17.

О.П.Щур, методист управління освіти Хмельницької міської ради, учитель-методист, учитель вищої категорії.

Б.В.Бейдерман, директор Хмельницького ліцею № 17, вчитель математики вищої категорії, учитель-методист, Відмінник освіти України.

А.В. Гулевата, заступник директора з наукової роботи Хмельницького ліцею № 17, учитель-методист, вчитель математики вищої категорії, Відмінник освіти України.

Пілявська Т.В. Доведення нерівностей у шкільному курсі математики. 9-10 клас:[Навчально-методичний посібник]/Т.В.Пілявська. – Хмельницький: Хмельницький ліцей № 17, 2014.- ___с.

Навчально-методичний посібник містить методичні поради, детальні покрокові пояснення та розв’язки основних типів завдань на доведення нерівностей, задачі для самостійного розв’язування. Посібник містить добірку задач різних за рівнем складності.

Посібник рекомендовано вчителям для використання на уроках, для організації позакласних занять з предмету, підготовки до олімпіад, факультативів і просто для зацікавлених вчителів, учнів та батьків.

Р Е Ц Е Н З І Я

на навчально – методичний посібник «Доведення нерівностей у шкільному курсі математики»

вчителя математики вищої категорії,

старшого вчителя Хмельницького ліцею № 17

Тетяни Володимирівни Пілявської

Запропонована праця «Доведення нерівностей у шкільному курсі математики» містить методичні підходи. Метою посібника є озброєння вчителів, учнів та батьків необхідними матеріалами для занять та довготривалої роботи – творчих пошуків, підготовки до олімпіад, домашніх завдань, тощо.

Посібник складається із передмови та двох розділів теоретико – практичного спрямування.

У кожному розділі навчально – методичного посібника містяться методичні поради, детальні покрокові пояснення та методи доведення основних типів нерівностей, що полегшує вчителям та батькам роботу щодо спрямування учнів до пошуку та вибору шляхів міркувань та розв'язань, допомагає сформулювати допоміжні запитання, які доведеться ставити учням у ході розв'язання завдань. Посібник містить задачі для самостійного розв'язування, добірку задач різних за рівнем складності, які можна використовувати у різних класах. Запропоновані задачі допоможуть підвищити творчу активність дітей, сприятимуть розвитку у них логічного мислення, вмінню аналізувати, порівнювати, синтезувати та здійснювати узагальнення, розвитку уявлень про деякі важливі ідеї та методи доведення нерівностей і, зрештою, підвищити рівень математичної підготовки учнів.

Посібник буде корисним вчителям математики для використання на уроках, для організації позакласних занять з предмету, підготовки до олімпіади, факультативів і просто для зацікавлених вчителів, учнів та батьків.

Вважаємо, що методичний посібник «Доведення нерівностей у шкільному курсі математики» вчителя математики вищої категорії, старшого вчителя

Хмельницького ліцею № 17 Тетяни Володимирівни Пілявської відповідає усім вимогам, що ставляться до науково – методичних робіт такого типу, є актуальним і доречним у шкільному навчально – виховному процесі як один із альтернативних посібників у сьогоднішньому різноманітті поглядів, підходів до навчальної діяльності. Творчий підхід, великий досвід та знання автора, науково – методичне розуміння поставленої проблеми роблять аналізовану працю цікавою і необхідною для школи, адже запропоновані матеріали знайдуть застосування на уроках математики та позакласній роботі з предмету в загальноосвітніх навчальних закладах.

Рецензент:

Старший викладач кафедри прикладної математики
та соціальної інформатики
Хмельницького національного університету,
кандидат економічних наук,
вчитель математики Хмельницького ліцею № 17 А. В. Яровий

Особистий підпис А.В. Ярового
засвідчую проректор з наукової роботи
Хмельницького національного університету
доктор технічних наук, професор Г. Б. Параска

ЗМІСТ

Передмова

Нерівності відіграють дуже велику роль у сучасній математиці. Лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження функцій неможливе без нерівностей. Досвід показує, що учні допускають багато помилок при розв'язуванні нерівностей, а завдання на доведення навіть простих нерівностей викликають неабиякі труднощі, зустрічаючи нерівності, що містять степені чи радикали учні потрапляють у глухий кут.

Спеціальної літератури присвяченої доведенню нерівностей дуже мало, тому завдання такого типу є чи не найважчими задачами шкільного курсу. Без доведення нерівностей не проходять і олімпіади з математики, тому обрана тема є досить актуальною.

У посібнику розглянуто властивості числових нерівностей, систематизовано ефективні методи прийоми їх доведення, наведено методичні поради, детальні покрокові пояснення та розв'язки основних типів завдань на доведення нерівностей.

Цей посібник також може бути використаний для підготовки до математичних олімпіад, конкурсів, турнірів, факультативів, гуртків і просто для зацікавлених вчителів, учнів та батьків.

Розділ 1

Нерівність — твердження про те, що два математичні об'єкти є різними, тобто не дорівнюють один одному. Для елементів упорядкованих множин нерівність може додатково стверджувати, що один із двох елементів менший або більший від іншого.

Властивості числових нерівностей

Розглянемо строгі числові нерівності. Вони мають такі властивості:

· Якщо $a < b$, то $b > a$.

· Якщо $a < b$, $b < c$, то $a < c$. Тобто, якщо перше число менше від другого числа, а друге число менше від третього числа, то перше число менше від третього числа.

· Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

· Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.

· Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і при цьому змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

· Якщо одне з додатних чисел більше за друге, то квадрат більшого числа більший від квадрата меншого числа. Якщо $a > b > 0$, то $a2 > b2$.

· Якщо модуль деякого числа a менший від числа b, то число a більше за число, протилежне числу b, і менше від числа b. Якщо $|a| < b$, то $–b < a < b$.

· Якщо модуль деякого числа a більше за число b, то число a більше за число b і менше від числа, протилежного числу b. Якщо $|a| > b$, то $a > b$ або $a < –b$.

Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати. Якщо $a< b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Нерівності з однаковими знаками, ліва і права частини яких є додатними числами, можна почленно перемножати. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$.

Приклад 1.

Відомо, що $-4 \leq a < -2$.

Доведемо, що $-7 < \frac{7}{3a+5} \leq -1$.

Розв'язання. Маємо: $-4 \leq a < -2$, тоді за теоремою 3 отримуємо $-12 \leq 3a < -6$. Застосовуючи теорему 2, одержимо $-7 \leq 3a+5 < -1$. Користуючись наслідком з властивості 3, можна записати, що $-\frac{1}{7} \geq \frac{7}{3a+5} > -1$, тобто $-1 > \frac{1}{3a+5} \geq -7$.

Звідси $-7 < \frac{7}{3a+5} \leq -1$.

Такі нерівності, як $a^2 \geq 0$, $-a^2-1 < 0$, $|x| + |y| \geq 0$, $(a-b)^4 \geq 0$ виконуються при всіх значеннях змінних.

Нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$ також виконується при будь-яких значеннях змінних x і y, хоча цей факт не настільки очевидний. У його справедливості слід переконатися. У таких випадках говорять, що потрібно довести нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$.

Маємо: $x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2$.

Вираз $(x - 4y)^2 + y^2$ набуває тільки невід'ємних значень, при будь-яких значеннях змінних x і y є правильною нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$.

Приклад 2.

Доведіть, що $x^2 + 10y^2 + 6xy - 8y + 16 \geq 0$, при всіх дійсних значеннях x і y.

Розв'язання. Виділимо квадрат двочлена

$x^2 + 10y^2 + 6xy - 8y + 16 = x^2 + 6xy + 9y^2 + y^2 - 8y + 16 = (x + 3y)^2 + (y - 4)^2 \geq 0$, оскільки сума квадратів набуває лише невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x і y.

Приклад 3.

Порівняти значення виразів $3\text{-}4\pi$ і $6\text{-}5\pi$.

Розв’язання. Щоб порівняти значення виразів $3\text{-}4\pi$ і $6\text{-}5\pi$, розглянемо їх різницю:

$(3 - 4\pi) – (6 - 5\pi) = 3 – 4\pi – 6+5\pi = \pi – 3$. Оскільки $\pi – 3>0$, то $3 - 4\pi >6 - 5\pi$.

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від’ємною, або дорівнювати нулю (a>b, a<b, a=b).

Розділ 2

Методи доведення нерівностей

Для доведення нерівностей використовують різні прийоми. Доводити нерівності можна за допомогою аналізу. При цьому потрібно пам'ятати декілька важливих нерівностей:

2.1 Теореми Коші та Коші-Буняковського

Порівняння середнього арифметичного($\frac{a+b}{2}$) й середнього геометричного

($\sqrt{ab}$) невід'ємних чисел. Середнє геометричне чисел не перевищує їхнього середнього арифметичного(нерівність Коші для двох чисел):

Доведемо,що: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$(нерівність №1).

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

При будь-яких невід'ємних значеннях a і b ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

Наслідок. $a+\frac{1}{a} \geq 2$;

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 1;$$

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

Зауважимо, що в нерівності (№1) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли a = b і a$\geq$ 0.

Приклад 1.Доведіть нерівність $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\sqrt{abc}$, при a>0, b>0, c>0.

Розв'язання. $\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a}$, $\frac{1+b}{2} \geq \sqrt{b}$, $\frac{1+c}{2} \geq \sqrt{c}$ - за теоремою Коші.

$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{8} \geq \sqrt{abc}$;

Звідси $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8\sqrt{abc}$.

Т е о р е м а . (н е р і в н і с т ь К о ш і — Б у н я к о в с ь к о г о).

При будь-яких значеннях $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність:

$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$(нерівність №2).

Л е м а. Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, де $a > 0$, при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант D недодатний.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що для даного квадратного тричлена $D > 0$. Тоді квадратний тричлен має два різні корені x_1 і x_2 і можна записати

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. За умовою $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ при будь-якому значенні змінної x, а отже, і при $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Маємо: $a(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1)(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2) \geq 0$.

Звідси $a(x_2 - x_1)(x_1 - x_2) \geq 0$.(1)

Оскільки $a > 0$ і $(x_2 - x_1)(x_1 - x_2) < 0$, то нерівність (1) є неправильною. Отже, припущення про те, що $D > 0$, також неправильне.

Доведення теореми. Якщо $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною. Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0. При будь-якому значенні змінної x виконується нерівність

$(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + ... + (a_n x - b_n)^2 \geq 0$. Цю нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + b_n^2 \geq 0$.

Ліва частина останньої нерівності — це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної x. Отже, за лемою його дискримінант D недодатний.

Маємо:

$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 – 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

Оскільки $D \le 0$, то

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$.

Якщо $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, то рівність у нерівності Коші—Буняковського досягається при будь-яких значеннях , $b_1, b_2, ... , b_n$.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ не дорівнює 0.

Покажемо, що в нерівності Коші—Буняковського рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що виконуються рівності

$b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, ..., b_n = ka_n$. (2)

Легко показати, що коли виконується умова (2), то нерівність Коші—Буняковського перетворюється на рівність.

Доведемо обернене твердження. Нехай,

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots +b_n^2)$.

Це означає, що квадратне рівняння

$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 – 2(a_1b_1 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + b_n^2 = 0$

має єдиний корінь. Нехай цей корінь дорівнює k. Тоді число k є коренем рівняння $(a_1x + b_1)2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots +(a_nx + b_n)^2 = 0$.

Отже, виконуються рівності $a_1k = b_1, a_2k = b_2, \ldots, a_nk = b_n$.

Приклад 2. Доведіть нерівність

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2 \le n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2).$$

Розв’язання. Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського, запишемо:

$$(a_1+a_2+...+a_n)=(a_1\times 1+a_2\times 1+...+a_n\times 1)\le$$
$$\le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(1_1^2+1_2^2+...+1_n^2)=n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$$

З доведеної нерівності можна отримати нерівність № 3:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

Вирази, записані в лівій і правій частинах цієї нерівності, називають відповідно середнім квадратичним і середнім арифметичним чисел

a_1, a_2,…,a_n. Ця нерівність є узагальненням нерівності (№ 2).

Приклад 3. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}=2|x-1|$.

Розв’язання. Перепишемо ліву частину рівняння так: $\sqrt{3}\times\sqrt{x}+1\times\sqrt{x^2-3x+1}$.

До наборів ($\sqrt{3}$;1) і ($\sqrt{x};\sqrt{x^2-3x+1}$)застосуємо нерівність Коші—Буняковського: $(\sqrt{3}\times\sqrt{x}+1\times\sqrt{x^2-3x+1})^2 \le ((\sqrt{3})^2+1^2)((\sqrt{x})^2+(\sqrt{x^2-3x+1})^2)$.

Звідси $(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1})^2 \le 4(x^2-2x+1)$;

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right| \le 2|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} \le 2|x-1|.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що $\sqrt{3}=k\sqrt{x}$, $1=k\sqrt{x^2-3x+1}$.

Звідси $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}$.

Отримане рівняння рівносильне заданому.

Маємо: $\begin{cases} \frac{x}{3} = x^2 - 3x + 1, \\ x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Відповідь: $3; \frac{1}{3}$.

2.2 При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ (нерівність№4).

Доведення. Маємо: $a^2+b^2 \geq 2ab$;

$$2a^2+2b^2 \geq 2ab+a^2+b^2;$$

$$2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2;$$

$$\frac{a \times a + b \times b}{2} \geq \frac{(a+b)(a+b)}{4};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(a+b)(a+b)}{4}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{|a+b|}{2};$$

Оскільки $|a+b| \geq a+b$, то $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

Зауважимо, що в нерівності (№4) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$.

2.3 Якщо $ab > 0$, то $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (нерівність№5).

Д о в е д е н н я. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < 0$ і $\sqrt{ab} > 0$.

У цьому разі нерівність, що доводиться, стає очевидною.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при a > 0 і b > 0 набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Зауважимо, що в нерівності (№5) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли a = b і a > 0.

З теорем 2.2, 2.3 і Коші для двох чисел можна зробити висновок, що при a > 0 і b > 0 є справедливим такий ланцюжок нерівностей:

$$\sqrt{\frac{a \times a + b \times b}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Проілюструємо застосування теорем 2.2, 2.3 та Коші для двох чисел на прикладах.

Приклад 4. Доведемо нерівність

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}.$$

Розв’язання. Скориставшись нерівністю (№1), можна записати:

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2}{2}} \geq \sqrt{2} \times \frac{x+1-y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{(1-x)^2 + y^2}{2}} \geq \sqrt{2} \times \frac{1-x+y}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2}\left(\frac{x+1-y}{2} + \frac{1-x+y}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Приклад 5. Знайдемо найбільше значення виразу ab, якщо відомо, що a > 0, b > 0 і 2a + b = 3.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3}{2} = \frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2ab}$.

Звідси $\sqrt{2ab} \leq \frac{3}{2}$; $ab \leq \frac{9}{8}$.

Остання нерівність ще не дозволяє зробити висновок, що найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$. Необхідно також показати, що існують такі значення a і b, при яких $ab = \frac{9}{8}$.

У записаній нерівності Коші для чисел 2a і b рівність досягається лише тоді, коли 2a = b. Тепер потрібні значення a і b можна знайти, розв'язавши систему:

2a=b,

2a+b=3.

Звідси $a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{3}{2}$.

Отже, найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$.

Приклад 6. Відомо, що a > 0, b > 0, c > 0. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Введемо позначення: $b+c = 2x$, $c+a = 2y$, $a+b = 2z$.

Звідси $a+b+c = x+y+z$, $a = y+z-x$, $b = x+z-y$, $c = x+y-z$.

Маємо:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + \frac{1}{2}(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) + \frac{1}{2}(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

2.4 Метод різниці

Цей прийом полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частин нерівності і доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних, тобто порівнюють її з нулем.

Приклад 7. Доведемо, що коли a > b > c, то $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}$ > a+2b+c.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}-(a+2b+c)= \left(\frac{a^2}{a-b}-(a+b)\right)+\left(\frac{b^2}{b-c}-(b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b}+\frac{c^2}{b-c}$$

Оскільки з умови a>b>c випливає, що a–b>0,b–c>0 і $b^2+c^2\neq 0$, то $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>0$.

Доведемо, що при всіх значеннях змінних є правильними нерівністі:

Приклад 8. $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4(a+b+c+d)$;

Розв'язання. $a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4\geq 0$;

$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0$, так як квадрати невід'ємні за знаком.

Звідси $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4(a+b+c+d)$.

Приклад 9. $a^2b^2+a^2+b^2\geq 4ab$;

Розв'язання. $a^2b^2-2ab+1+a^2+2ab+b^2\geq 0$;

$(ab-1)^2+(a-b)^2\geq 0$, аналогічно прикладу 8.

Отже $a^2b^2+a^2+b^2\geq 4ab$.

Приклад 10. Доведіть, що коли x>0, y>0, то $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$.(нерівність №4)

$$\frac{a^2(xy+y^2)+b^2(xy+x^2)+(a+b)^2xy}{xy(x+y)}\geq 0;$$

$$\frac{a^2y^2+2abxy+b^2x^2}{xy(x+y)}=\frac{(ay+bx)^2}{xy(x+y)}\geq 0.$$

2.5 Метод спрощення нерівності

Приклад 11. Доведіть нерівність $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!}<1$, де n ∈N.

Розв'язання. $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$; $\frac{3}{4!}=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$;

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}<0$, що і треба було довести.

Приклад 12. Доведіть нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}<1$, де n ∈N.

Розв'язання. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}<1$, що і треба було довести.

2.6 Метод, у якому застосовуються міркування «від супротивного»

Приклад 13. Доведіть нерівність: $\sqrt{a+\sqrt{b}}\times\sqrt{b+\sqrt{a}}\geq\sqrt{a+\sqrt{a}}\times\sqrt{b+\sqrt{b}}$.

Розв'язання. Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною, тобто існують такі значення a і b, при яких є правильною нерівність $\sqrt{a+\sqrt{b}}\times\sqrt{b+\sqrt{a}}<\sqrt{a+\sqrt{a}}\times\sqrt{b+\sqrt{b}}$.

Звідси: $(a+\sqrt{b})(b+\sqrt{a})<(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})$;

$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}<a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$;

$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})<0$.

Остання нерівність є неправильною, оскільки при $a\geq 0$ і $b\geq 0$ різниці $(a-b)$ і $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ – мають однакові знаки або дорівнюють нулю. Отримана суперечність означає, що задана нерівність є правильною.

Приклад 14. Доведіть, що коли a≥0, b≥0, c≥0 і d≥0, то $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.Допустимо, що ця нерівність неправильна, тобто значення a, b, c і d такі, що $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Тоді $(a+c)(b+d) \leq ab + 2\sqrt{ab} \times \sqrt{cd} + cd$.

$ab + bc + ad + cd - ab - 2\sqrt{ab} \times \sqrt{cd} - cd = bc + ad - 2\sqrt{bc} \times \sqrt{ad} = (\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2 \geq 0$, при a≥0, b≥0, c≥0 і d≥0. Тобто нерівність $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ - неправильна.

2.7 Тотожні перетворення, зведення до очевидної нерівності.

В цьому методі задану нерівність отримують у результаті додавання або множення кількох очевидних нерівностей.

Приклад 15. Доведіть нерівність:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b і c

виконується така нерівність:

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

Звідси $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$;

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

2.8 Метод застосування раніше доведеної нерівності

Нерідко раніше доведена нерівність може бути використана для доведення іншої, більш складної нерівності.

2.8.1 Застосування нерівності $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Приклад 16. Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \le \frac{b+c}{2cb} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}.$$

Звідси $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

2.8.2 Застосування нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

Приклад 17. Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a+b+c)$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \\ & = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = \\ & = ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Матеріал двох попередніх пунктів переконує нас у тому, що найбільш ефективним методом доведення нерівностей є застосування раніше доведеної нерівності. Якщо за допомогою деякої нерівності можна довести цілу низку інших більш складних нерівностей, то таку нерівність називатимемо ключовою. Так, нерівності $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$,нерівності між середніми величинами, нерівність Коші—Буняковського, безумовно, можна віднести до ключових нерівностей.

Довівши нерівність $\frac{a^2}{b} \ge 2a - b$, де $b > 0$.

Доведення. $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b} = \frac{(a-b)^2}{b} \ge 0$, так як $(a\text{-}b)^2 \ge 0$ і $b>0$.

Зауважимо, що в цій нерівності рівність досягається лише при $a=b$. Ця проста нерівність являється одною з ключових нерівностей. Зазначимо, що ми доводили нерівність для n =2.Цю нерівність можна узагальнити.

Насправді, є справедливою така нерівність: $(n-k)\dfrac{a^n}{b^n} \ge na^{n-k} - kb^{n-k}$, де n ∈ N, a>0, b>0.

Якщо a>0, і b>0, то: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ (нерівність №4).

Застосовуючи доведення нерівності №4, нескладно довести нерівність: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де x >0, y >0, z >0(нерівність №5).

Маємо: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}+\dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Нерівність №5 є ключем до розв'язання цілої низки непростих задач. Розглянемо приклади її застосування. Насамперед покажемо, як, використовуючи цю нерівність, можна довести вже одну із відомих вам нерівностей.

Приклад 18. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \ge \frac{9}{x+y+z}.$$

Розв'язання:

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} = 2\left(\frac{1^2}{x+y}+\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}\right) \ge 2\times\frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{9}{x+y+z}.$$

Після того, як за допомогою нерівності №4 ми довели нерівність №5, цілком ймовірно припустити, що справедливою є нерівність:

$\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y_2}+...+\dfrac{x_n^2}{y_n} \ge \dfrac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$, де y_1, y_2,…y_n – додатні числа. Якщо в останній нерівності x_1 замінити на a_1b_1, відповідно x_2 на a_2b_2,…,x_n на a_nb_n, а y_1 на a_1b_1, y_2 на a_2b_2,…, y_n на a_nb_n, то отримаємо:

$$\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+...+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2} \ge \frac{(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}.$$

Звідси $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$,

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 .$$

Таким чином, ми отримали ще один спосіб доведення нерівності Коші-Буняковського.

Завдання для самостійного опрацювання

№1 Доведіть нерівність $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$.

№2 Доведіть, що коли a > 0, b > 0 і c > 0, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

№3 Доведіть нерівність $(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{a})^4 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

№4 Відомо, що $a^2+b^2+c^2=1$. Доведіть, що

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leq 3.$$

№5 Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, де n∈N, n>1.

№6 Для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ доведіть, що

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

№7 Відомо, що a > 0, b > 0 і a + b = 1. Доведіть, що

$$(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2 \geq \frac{25}{2}.$$

№8 Доведіть, що коли a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, то

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

№9 Для додатних чисел x, y і z доведіть нерівність

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geq x^2+y^2+z^2.$$

№10 Доведіть, що коли a > 0, b > 0, c > 0 і abc = 1, то

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c\,.$$

№11 Для додатних чисел a,b таких, що a+b=ab, доведіть нерівність

$$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\geq\frac{1}{2}.$$

Список використаної літератури:

1. Конет І.М., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні олімпіади з математики – Кам’янець-Подільський.: Абетка, 2010.
2. Вишенський В.А. та ін. Вибрані питання елементарної математики – Київ.: Вища школа, 1982.
3. Коваленко В.Г., Гельфанд М.Б., Ушаков Р.П. Доведення нерівностей. – Київ.: Вища школа, 1079.
4. Копцюх М.Г., Савич Є.Ф. Доведення нерівностей. – Київ.: Радянська школа, 1982.
5. http://uk.wikipedia.org
6. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч – Тернопіль.: Навчальна книга – Богдан, 2011