Паркеты и разрезания

Наверное, каждому читателю «Кванта» известны паркеты из правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников (рис.1). А можно ли составить паркет из каких-нибудь других многоугольников?

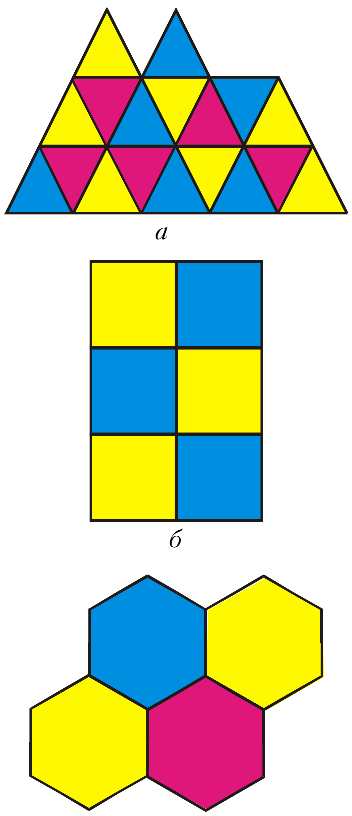

Рис. 1

Еще раз поглядев на рисунок 1, нетрудно догадаться, что правильный треугольник можно заменить произвольным, а квадрат – любым параллелограммом. Труднее поверить, что паркет можно составить из любого четырехугольника, но, тем не менее, это так (рис.2). Существует довольно много выпуклых пяти- и шестиугольников, из которых составляется паркет (подробнее об этом можно прочитать в книге М.Гарднера «Путешествие во времени и другие задачи»), однако никакой выпуклый многоугольник с числом сторон, большим шести, для этой цели не подходит. Вместе с тем существуют составляющие паркет невыпуклые многоугольники с произвольным числом сторон, причем среди получающихся паркетов есть довольно любопытные. Один из примеров приведен на рисунке 3.

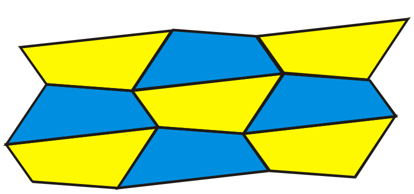

Рис. 2

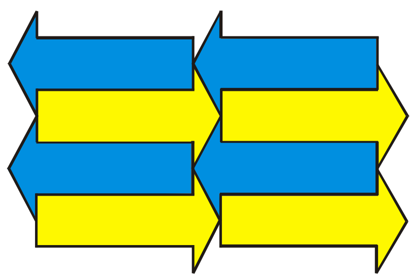

Рис. 3

Отметим теперь одну особенность паркетов на рисунках 1,*а* и 1,*б*. На них можно выделить группы из 4, 9 и т.д. исходных многоугольников, образующие подобные им многоугольники большего размера. Фигуры, которые можно разрезать на подобные им и равные между собой, называются делящимися или самоподобными. Таким образом, треугольник и параллелограмм являются делящимися фигурами.

Из рисунка 4 видно, что параллелограмм с отношением сторон $1:\sqrt{n}$ можно разрезать на n равных между собой и подобных ему параллелограммов. Следовательно, для любого n существуют многоугольники, делящиеся на n подобных. Однако, количество таких многоугольников сильно зависит от n. Так, способность делиться на

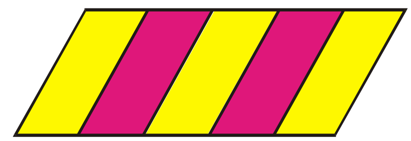

Рис. 4

4, 9 и т.д. частей распространена достаточно широко. На рисунке 5 показано несколько многоугольников, разрезанных на 4 подобные части. Каждый из них может быть разрезан также на 9, 25 и т.д. частей. С другой стороны, много-

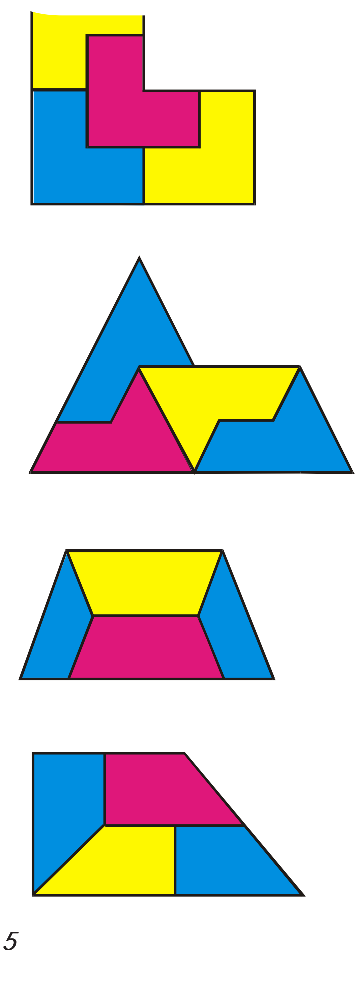

Рис. 5

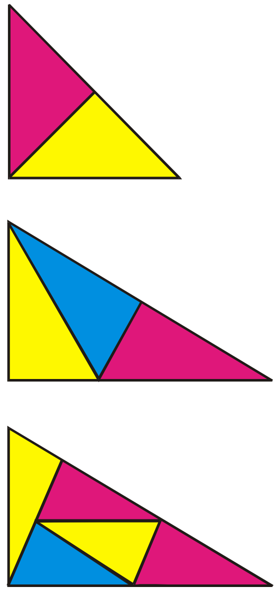

Рис. 6

угольников, делящихся на p частей, где p – простое число, и отличных от приведенных на рисунке 4 параллелограммов, крайне мало. Например, для p, равного 2, 3 или 5, такими многоугольниками являются только треугольники, приведенные на рисунке 6.

Надо сказать, что пространственные аналоги рассмотренных задач представляют крайне сложные проблемы. В частности, неизвестно, какое максимальное число граней может быть у заполняющего пространство выпуклого многогранника. Вопрос о разрезании многогранников на подобные не решен даже для тетраэдров. Известны 4 тетраэдра, которые можно разрезать на 8 подобных им и равных между собой частей, но не доказано, что список ими исчерпывается.

Попробуем теперь разрезать фигуры на равные, но не обязательно подобные исходной фигуре части. Как ни странно, общего способа определить, может ли данная фигура быть разрезана таким образом, не существует даже для двух частей. Впрочем, попытавшись разрезать на две равные части фигуры на рисунке 7, можно поверить, что эта задача может быть весьма нетривиальной.

Откажемся, наконец, и от требования равенства частей, заменив его требованием равенства их площадей. Очевидно, что любую фигуру можно разрезать по прямой на две равновеликие части. Значительно интереснее, что для любых двух фигур существует прямая, разрезающая каждую из них на две равновеликие части (рис.8). Верен также пространственный аналог этой теоремы: любые три тела можно разрезать одной плоскостью на части равного объема.

Вообще говоря, прямая, делящая пополам площадь фигуры, не обязательно делит пополам ее периметр. Тем не менее для любой фигуры можно найти прямую, делящую ее площадь и периметр на равные части. Попробуйте решить эту задачу для треугольника (подсказка: искомая прямая должна проходить через центр вписанной в треугольник окружности, а «отрезать» нужно средний по величине угол треугольника, как на рисунке 9).

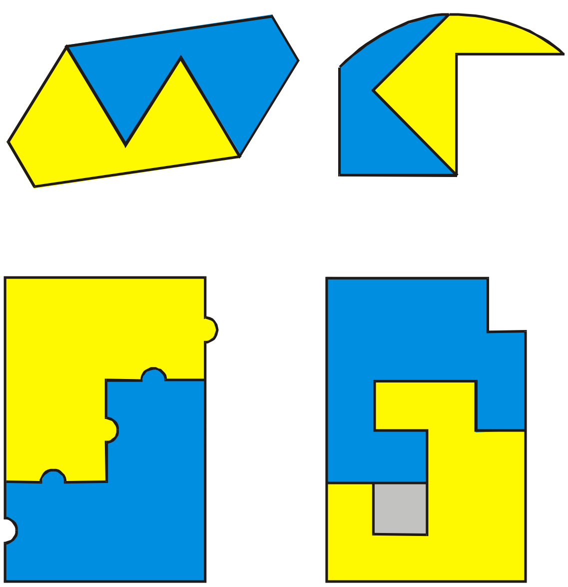

Рис. 7

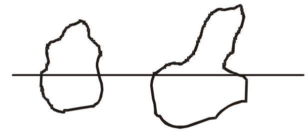

Рис. 8

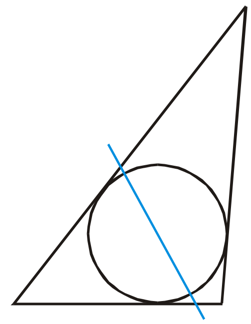

Рис. 9

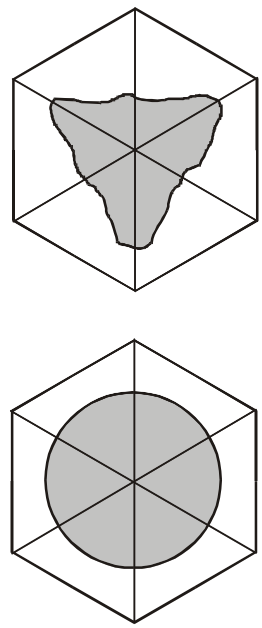

Рис. 10

И последний вопрос: какая из всех линий, делящих пополам площадь правильного треугольника, имеет наименьшую длину? Составив из шести треугольников правильный шестиугольник (рис.10), убеждаемся, что искомой линией будет дуга окружности с центром в вершине треугольника (заштрихованные фигуры имеют одинаковую площадь, а из всех фигур данной площади круг имеет наименьший периметр). Правда, построить эту дугу с помощью циркуля и линейки невозможно (эта задача эквивалентна квадратуре круга).

А.Заславский