# СТРАТЕГІЯ ВИГРАШУ

**Укладач В. М. Руденко,** м. Прилуки, Чернігівська обл.

Викладання математики має викликати інтерес до предмета. Значні можливості для цього дає вивчення різноманітних математичних закономірностей.

Школа повинна не тільки формувати в учнів міцну основу знань, умінь і навичок, а й максимально розвивати розумову активність — учити мислити.

Однією з можливостей розвитку логічного мислення є математичні ігри. Деякі з них прості і не займають багато часу. Їх можна використовувати як розминку на уроках, а інші, більш складні, — під час проведення факультативів.

Математична гра, перш за все, передбачає знання предмета. По-друге, учень вчиться планувати свою роботу, оцінювати свої результати та результати суперника. Гра спонукає учня до пізнавальної активності, підвищує інтерес до математики, сприяючи при цьому особистому самовдосконаленню.

Беручи участь у математичних іграх, учні не тільки отримують нову інформацію, а й набувають досвіду її правильного використання.

## ПОНЯТТЯ ВИГРАШНОЇ СТРАТЕГІЇ

Усі відомі ігри, зокрема шахи, шашки, «хрестики-нулики», незважаючи на їх зовнішню несхожість, мають характер конфлікту між двома сторонами — гравцями. Кожен гравець має у своєму розпорядженні набір стратегій.

Стратегія — це вичерпно повний план дій того чи іншого гравця.

У кожній зі згаданих ігор обидва гравці почергово роблять ходи за точно визначеними правилами. Гра закінчується виграшем одного із суперників або ж унічию. Виграшні і нічийні позиції обумовлені раз і назавжди правилами гри. Цим іграм притаманна ще одна властивість: у кожен момент гри обидва гравці мають повне уявлення про ситуацію у грі. Саме тому згадані та подібні до них у цьому розумінні ігри називають іграми з повною інформацією. Прикладами ігор іншого типу, тобто з неповною інформацією, є доміно або «морський бій». У таких іграх гравець, як правило, змушений робити хід в умовах, коли він не знає достовірно позиції, що виникла у грі на цей момент.

Перебіг партії у грі з повною інформацією залежить від уміння гравця правильно оцінити позицію, у якій йому доводиться робити хід. Такі ігри бувають лише трьох типів: виграшні для першого гравця, виграшні для другого гравця та нічийні.

У кожній такій грі беруть участь двоє. Вони роблять ходи почергово. У задачі вимагається встановити, у кого з гравців (того, хто починає гру, чи його суперника) є виграшна стратегія, тобто шлях, який неминуче приведе до перемоги незалежно від ходів суперника, і в чому вона полягає. Повний перебір усіх можливих ходів та ходів-відповідей, як правило, здійснити не вдається. Тому під час розв'язування таких задач доводиться шукати деяку властивість-інваріант, на основі якої можна побудувати виграшну стратегію. Інваріантом називають величину, що характеризує стан певної системи і зберігається при всіх її переходах.

Найбільш поширеними є симетричні та парні стратегії, а також стратегії, які будуються на основі аналізу ігрових позицій.

Симетричні стратегії — це виграшні стратегії, розроблені на основі симетрії стартової позиції гри. Аналіз розв'язань таких задач показує, що в іграх із симетричною стартовою позицією здебільшого виграє той, хто не порушує її симетрію, а порушену суперником симетрію стартової чи ігрової позиції може поновити. Цей простий висновок часто допомагає здобути перемогу в ігрових задачах із симетричною стартовою позицією.

Для знаходження стратегії перемоги можна використовувати такі ідеї:

**1. Відповідність**

Наявність вдалого відповідного ходу, що забезпечується симетрією та ін.

**2. Розв'язування з кінця**

Послідовно визначаються позиції, виграшні та програшні для першого гравця. Наступна позиція є виграшною, якщо з неї можна отримати певну програшну позицію, і є програшною, якщо будь-який хід із неї приведе до потрапляння в раніше визначену виграшну позицію.

**3. Передача ходу**

Якщо гравець може скористатися стратегією суперника, то він матиме можливість виграти. Наприклад, виграш або нічия забезпечаться, якщо можна за своїм бажанням потрапити в деяку позицію або змусити суперника потрапити в неї.

## ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАНЬ ВИГРАШНИХ СТРАТЕГІЙ У МАТЕМАТИЧНИХ ІГРАХ

### Симетричні стратегії

**Задача 1.** Двоє гравців почергово кладуть п'ятикопійчані монети на круглий стіл. Монети повинні повністю вміщуватися на столі і не дотикатися одна одної. Той, кому нікуди покласти монету, програє. Хто за умови дотримання правил гри виграє — той, хто ходить першим, чи той, хто ходить другим?

***Розв'язання***

Виграє перший, якщо своїм першим ходом він покладе монету в центр стола, а потім робитиме ходи симетрично ходам другого відносно центра стола. [Додаток а]

**Задача 2.** Дано шахівницю $8\times8$ і прямокутне доміно $1\times2$. За один хід дозволяється накрити дві сусідні клітинки шахівниці так, щоб плитки доміно не перекривались. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія?

***Розв'язання***

Виграє другий гравець, якщо щоразу буде ставити плитку доміно симетрично відносно центра дошки до плитки, поставленої першим гравцем. [Додаток б]

**Задача 3.** Двоє гравців по черзі виймають із ящиків кульки. За один хід кожен гравець може брати з будь-якого ящика довільну кількість кульок. Виграє той, хто візьме кульку останнім. Як повинен грати перший гравець, щоб виграти, якщо в першому ящику 73 кульки, а в другому — 118 кульок?

*Розв'язання*

Перший гравець першим своїм ходом повинен з другого ящика взяти 45 кульок. Після цього кількість кульок обох ящиках стане рівною. Як би не ходив потім другий гравець, перший відповідатиме на його ходи симетрично (брати стільки ж кульок, скільки візьме другий).

**Задача 4.** Оксанка й Оленка обривають на ромашці пелюстки. За один раз можна зірвати будь-яку одну пелюстку або дві, що розташовані поруч. Виграє та дівчинка, яка зірве останню пелюстку. Гру починає Оксанка. Хто виграє, якщо на ромашці:

1) 24 пелюстки;
2) 25 пелюсток?

*Розв'язання*

1) Виграє Оленка, якщо використає центральну симетрію стартової позиції.
2) У цьому випадку стартова позиція гри має осьові симетрії. Їх усього 25 — стільки, скільки ромашка має пелюсток. Оксанка своїм першим ходом не порушить симетрії відносно однієї з цих осей. Але своїм першим ходом й Оленка може не порушити симетрії. Для цього їй треба так зірвати одну або дві пелюстки, щоб між зірваними пелюстками їх залишилось по 11. Другим ходом Оксанка вже змушена порушити симетрію. Відповідаючи на кожний хід Оксанки, Оленка щоразу може поновлювати симетрію ігрових позицій, що забезпечить її перемогу у грі.

**Задача 5.** Із паперу в клітинку вирізали квадрат розміром $1993 \times 1993$, із якого потім вирізали кутову клітинку. Двоє гравців по черзі від цієї фігури відрізають по лініях клітинок квадрати довільних розмірів і відкидають їх. Програє той гравець, після ходу якого фігура, що залишиться, є прямокутником довільних розмірів або розпадається на частини (якщо частини мають хоча б одну спільну точку — вершину, то вони не розпадаються). Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

*Розв'язання*

У цій задачі треба взяти за вісь симетрії пряму, на якій лежить діагональ квадрата, що проходить через вилучену клітинку. Якщо гравець, який починає гру, першим своїм ходом виріже квадрат зі стороною в 1991 клітинку, діагональ якого міститься на осі симетрії, то, по-перше, він не порушить симетрії, а по-друге, змусить суперника її порушити. Поновлюючи впродовж гри симетрію, порушену другим гравцем, перший переможцем завершить гру. Якщо перший гравець за першим своїм ходом виріже квадрат менших розмірів, то другий гравець може перехопити ініціативу і примусити першого визнати поразку.

**Аналіз задачі з кінця**

**Задача 6.** У коробці знаходиться 60 сірників. За один хід можна взяти від 1 до 5 сірників. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

*Розв'язання*

Проаналізуємо кінцівку такої гри. Якщо кількість сірників менша ніж 6, то той гравець, чия черга ходити, закінчить гру і виграє. Якщо кількість сірників більша за 6, то гра закінчується через 2 або більше ходів. Якщо ж кількість сірників дорівнює 6, то гравець, чий хід передував цій позиції, точно наступним ходом закінчить гру. Для цього на хід суперника в $n$ сірників він візьме $6-n$ сірників. Тобто, така позиція є виграшною для цього гравця. Очевидно, що позиції 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 сірників для нього є також виграшними, бо таким же способом він від позиції «24 сірники» переходить до позиції «18 сірників», від «18» — до «12». Отже, початкова позиція виграшна для другого гравця. Пропонуємо таку виграшну стратегію: другий гравець доповнює до ходів першого гравця сірники до 6.

**Задача 7.** Гра починається з числа 1. За один хід дозволяється помножити подане число на будь-яке натуральне число від 2 до 9. Виграє той, хто першим одержить число, більше за 1000.

*Розв'язання*

Аналізуючи з кінця, знаходимо виграшні позиції. Це числа від 56 до 111 і від 4 до 6. Таким чином, виграє перший гравець, якщо його першим ходом будуть числа 4, 5 або 6.

Міркування під час аналізу фіналу ігор привели до розгляду класу виграшних позицій, що характеризуються такими властивостями:

1) За один хід з однієї виграшної позиції не можна перейти до іншої виграшної позиції;
2) Із будь-якої невиграшної позиції за один хід можна перейти до деякої виграшної, відмінної від попередньої виграшної позиції.

Знаходження такого класу виграшних позицій рівносильне її розв'язанню. До перемоги веде стратегія — перехід до виграшних позицій. При цьому, якщо початкова позиція виграшна, то виграє другий гравець, а у протилежному випадку виграє той, хто починає. Пошук виграшних позицій у більшості випадків доцільно проводити саме за допомогою аналізу фіналу гри. Іноді до таких позицій можна прийти інтуїтивно.

**Ігрові ситуації на шаховій дошці**

У кожній із вище розглянутих ігор обидва гравці мають повне уявлення про ситуацію у грі. Такі ігри називають іграми з повною інформацією.

До них належить гра в шахи. Але відрізняється вона від попередніх тим, що для неї ще не винайшли чіткої виграшної стратегії для чорних або білих фігур. Гра настільки складна, що навіть за допомогою найпотужніших обчислювальних машин не можна вичерпно проаналізувати її, визначити тип і встановити послідовність ключових ходів під час ідеальної партії. Саме завдяки цьому шахи не втрачають своєї привабливості.

Проаналізуємо деякі прості ігрові ситуації на шаховій дошці.

**Задача 8.** Тура стоїть на лівій кутовій клітинці шахівниці (на полі a1). За хід дозволяється пересунути її на будь-яке число клітинок вправо або вгору. Виграє той, хто поставить туру на протилежну праву верхню кутову клітинку (на поле h8). Хто з двох гравців має виграшну стратегію?

***Розв'язання***

Її має другий гравець, оскільки кожним своїм ходом він може повернути туру на велику діагональ шахівниці (a1 – h8). Оскільки перший гравець весь час змушений буде забирати туру з цієї діагоналі (займати програшні позиції), а поле h8 лежить на ній, то на це поле зможе стати саме другий гравець, зробивши не більше 7 ходів. [Додаток в]

**Задача 9.** Двоє грають у таку гру. Спочатку перший ставить шахового коня на довільну клітинку дошки $8\times8$, потім другий робить хід цим же конем. Потім хід робить перший тощо. Забороняється ставити коня на клітинку, на якій він побував раніше. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє за правильної гри?

***Розв'язання***

Розділимо дошку прямими на 8 прямокутників розміром $4\times2$. Другий гравець виграє, застосовуючи таку стратегію: за будь-якого ходу першого гравця він ставить коня на поле, що знаходиться в тому самому прямокутнику, куди його ставить перший.

**Безпрограшні ігри**

Безпрограшні ігри або ігри-жарти — це такі, результат яких не залежить від того, як грають суперники. Тому для розв'язання такої гри не треба визначати виграшну стратегію. Достатньо лише довести, хто виграє: той чи інший гравець незалежно від своєї гри.

**Задача 10.** Є три купки камінців: у першій — 10, у другій — 15, у третій — 20. За один хід дозволяється розбити будь-яку купку на дві менші. Програє той, хто не зможе робити хід. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

***Розв'язання***

Другий гравець виграє без будь-якої стратегії. Після кожного ходу кількість купок збільшується на один. У кінці гри їх має стати 45. Для цього потрібно зробити 42 ходи. Оскільки кожен парний хід робить другий гравець, тому він завжди перемагатиме.

**Задача 11.** Двоє по черзі розламують шоколадку $6\times8$. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якої частини вздовж заглиблення. Програє той, хто не зможе зробити хід.

***Розв'язання***

Міркуємо так: після кожного ходу кількість частинок збільшується рівно на 1. Отже, кількість ходів (кількість розломів шоколадки) у цій грі дорівнює $6\cdot 8-1=47$. Останній хід за гравцем, який виграє. Гравець, який розпочинає гру, робить непарні ходи. Отже, він і перемагає. Або можна міркувати ще так. Спочатку був один шматок. Наприкінці гри, коли не можна зробити жоден хід, шоколадка розламана на маленькі частинки. А їх — 48. Таким чином, гра буде тривати рівно 47 ходів. Останній, 47-й хід (як і всі інші ходи з непарними номерами), зробить гравець, який розпочинає гру. Тому він у цій грі перемагає, причому незалежно від того, як він буде грати.

***Висновок.*** У таких іграх гравець, який хоче виграти, повинен володіти теорією парності чисел.

### Задачі для самостійного розв'язування

**1. Ромашка** має:
1) 12 пелюсток;
2) 13 пелюсток.

Грають двоє гравців. За один хід дозволяється відірвати або одну пелюстку, або дві, що розташовані поруч. Програє той, хто не зможе зробити хід. У кого з гравців є виграшна стратегія?

**2. Гра «Хрестики-нулики»** проводиться на квадратному полі $3\times 3$, що містить 9 квадратних клітинок. Двоє гравців по черзі заповнюють вільні клітинки: перший — заповнить своїми символами горизонталь, вертикаль або діагональ із трьох квадратів. Якщо це не вдалося нікому, то гра закінчується внічию. Хто забезпечить собі перемогу?

**3.** Гра починається з числа 2004. За хід дозволяється змінити число на один із його дільників. Програє той, хто дістав 0. У кого з двох гравців є виграшна стратегія?

**4.** Дано дерев'яну дошку в клітинку розміром $n\times n$. Двоє гравців по черзі роблять пилкою розпили довжиною 1, що йдуть по лініях сітки. Кожний розпил має починатися з вузла сітки, на краю дошки або на вже зробленому розпилі. Хто виграє за правильної гри: той, хто починає, чи його суперник?

**5.** У квадраті $5\times 5$ центральна клітина (разом з її межею) зафарбована. Два гравці по черзі зафарбовують ще не зафарбовані клітини. Клітини зафарбовуються разом із кордоном.

Гравець програє, якщо після його ходу на будь-якому промені з початком у центральній клітці є хоча б одна зафарбована точка, крім початку променя. Хто з гравців може виграти незалежно від гри суперника?

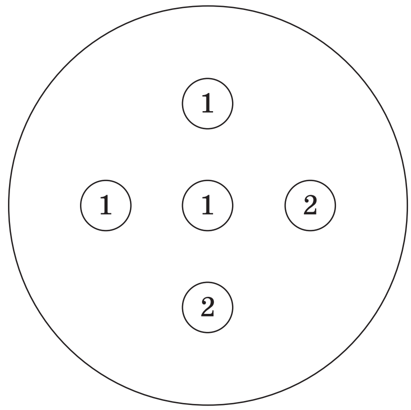
**6.** У таблиці розміром $1 \times 13$ клітинок хлопчик і дівчинка по черзі замальовують одну або дві сусідні клітинки. Перемагає той, хто замалює останню клітинку. Хто виграє — хлопчик, який починає гру, чи дівчинка?

**7.** Двоє гравців по черзі ставлять слонів у клітинки шахової дошки так, щоб слони не били один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити хід.

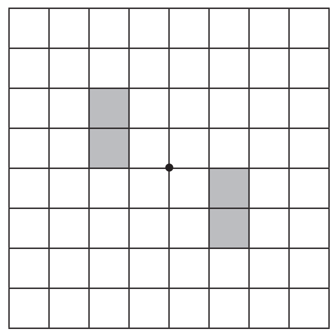
### ЛІТЕРАТУРА


1. *Васильев Н. Б., Гетенмахер В. П., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. — М. : Наука, 1987. — 176 с.
2. *Вороний О. М.* Готуємось до олімпіад з математики. — Х. : Вид. група «Основа», 2008. — 256 с.
3. *Готуємось* до олімпіади з математики / А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. — Х. : Вид. група «Основа», 2007. — 160 с.
4. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. — М. : Просвещение, 1986. — 304 с.
5. *Игнатев Е. И.* В царстве смекалки. — М. : Наука, 1978. — 192 с.
6. *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. — М. : МЦНМО, 1997. — 96 с.
7. *Коваль Т. В.* 400 задач з математичних олімпіад. — Тернопіль : Мандрівець, 1998. — 80 с.
8. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. — М. : Наука, 1991. — 576 с.
9. *Михайловский В. І., Ядренко М. Й., Призва Г. Й., Вишенський В. А.* Збірник задач республіканських математичних олімпіад. — К. : Вища школа, 1972. — 132 с.
10. *Перельман Я. И.* Живая математика. — М. : Наука, 1974. — 160 с.
11. *Я пізнаю* світ / А. П. Савін, В. В. Станцо, Г. Ю. Котова. — К. : Школа, 2002. — 432 с.
12. *Сарана О. А.* Математичні олімпіади: Просте і складне поруч. — Тернопіль : Навчальна книга – БОГДАН, 2011. — 400 с.
13. *Федак І. В.* Готуємося до олімпіади з математики. — Чернівці, 2003. — 360 с.
14. *У світі* математики. 18 випуск. / М. І. Ядренко. — К. : Радянська школа, 1987. — 240 с.
15. *У світі* математики. 19 випуск. / М. І. Ядренко. — К. : Радянська школа, 1989. — 240 с.
16. http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%85%D0%B8
17. http://www.math.ru/lib/files/pdf/olimp/MMO.pdf


## ДОДАТОК А




## ДОДАТОК Б



## ДОДАТОК В